ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2015-2016

Durée : 2 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4,5 pts).
a) Résoudre, selon la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le système, d'inconnues réelles x, y et z :

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} x - y - z = \lambda - 1 \\ 2x - y - z = 2\lambda - 1 \\ x + y + (\lambda + 4)z = 2\lambda + 4. \end{cases}$$

b) Rappeler la définition d'un système de Cramer.
c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur λ le système (S_λ) est-il un système de Cramer ?

Exercice 2 (3 pts).
a) Soient n, p, q, r des entiers naturels non nuls, A une matrice $n \times p$ et B une matrice $q \times r$. A quelle condition sur n, p, q, r le produit AB est-il défini ? Quelle est alors la dimension (nombres de lignes et colonnes) de ce produit ? Exprimer les coefficients $c_{i,j}$ de la matrice AB en fonctions des coefficients $a_{i,j}$ de A et des coefficients $b_{i,j}$ de B.
b) On considère les matrices :

$$A = [i - j]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Parmi les matrices suivantes, déterminer lesquelles sont définies et les calculer :

$$B + C, \quad {}^tB, \quad {}^tB + 2C, \quad BC, \quad AB, \quad BA.$$

Date: Mardi 1er mars 2016.

Exercice 3 (4 pts)**.** Soit M la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer si la matrice M est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse. *Les calculs intermédiaires sont demandés. Une réponse sans justification, même juste, ne sera pas comptabilisée.*
b) Soit a, b, c des nombres réels. <u>En utilisant la question précédente</u>, résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x, y et z :

$$(T) \qquad \begin{cases} -3x + 8y + 4z = a \\ \quad x - 3y - 2z = b \\ -2x + 7y + 5z = c. \end{cases}$$

On commencera par écrire ce système sous forme matricielle.

Exercice 4 (3 pts)**.** Soit $P = X^4 - 2X^3 - 10X^2 + 6X + 45$.
a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 6X + 9$.
b) Donner les racines réelles de P avec leurs ordres de multiplicité.
c) Donner les racines complexes de P avec leurs ordres de multiplicité.

Exercice 5 (2,5 pts)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6 (Exercice d'algorithmique, 3 pts)**.** On veut calculer une valeur numérique $p(x)$ à partir d'un nombre x et d'un polynôme $p(X)$ de degré n avec $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$. Il est possible d'évaluer $p(x)$ en n'utilisant que n multiplications. En effet, $p(X)$ peut se factoriser comme : $p(X) = a_0 + X(a_1 + X(a_2 + X(a_3 + X(\ldots + X(a_{n-1} + a_nX)))\ldots)$. Par exemple,

$$3 + 6X^2 - X^3 + 2X^4 + X^5 = 3 + X(0 + X(6 + X(-1 + X(2 + X)))).$$

Écrire une fonction en C *double eval (double p[n+1], double x)* utilisant la méthode précédente pour évaluer le polynôme p de degré n en la valeur x, où p est représenté par un vecteur de coefficients, $p[i] = a_i$, pour $0 \leq i \leq n$.