ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2015-2016

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barème est donné à titre indicatif. L'exercice d'algorithmique (question 7) doit être fait sur une intercalaire séparée.

Exercice 1 (Questions de cours, 4pts)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E.

a) Rappeler la définition de "$\mathcal{F}$ est une famille libre".

b) Démontrer le résultat suivant :
Supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $\vec{v}$ un vecteur de E. Alors $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{v})$ est libre si et seulement si $\vec{v} \notin \text{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Exercice 2 (1pt)**.** On considère les matrices suivantes :

$$A = [i-j]_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}} \text{ et } B = [i+j]_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}.$$

Calculer AB.

Exercice 3 (3pts)**.** Soit $\vec{u}_1 = (3, -1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (-2, 4, -1)$. Soit $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

a) A quelle condition sur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ le système suivant, d'inconnues $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est-il compatible :

$$a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = (x, y, z)?$$

En déduire une description cartésienne de F.

b) Soit $\vec{u}_3 = (4, -1, 3)$ et $G = \text{vect}(\vec{u}_3)$. A-t-on $\vec{u}_3 \in F$? Déterminer $F \cap G$.

c) Déduire de la question précédente la dimension de $F+G$, puis déterminer $F+G$. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 (3pts)**.** Soit f l'application linéaire de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^4$ définie par

$$f\big((x, y, z)\big) = (x + iy + z, y + iz, x + 2iy, iy - z).$$

a) Donner la matrice représentation de f dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^3$ et $\mathbb{C}^4$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}\, f$. L'application f est-elle injective ?

Date: Lundi 2 mai 2016.

c) Déduire de la question précédente la dimension de l'image de f. Donner une base de l'image de f. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 5 (4,5pts)**.** On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{a}_1 = (-1,-1,1), \quad \vec{a}_2 = (-1,1,0), \quad \vec{a}_3 = (0,-3,2).$$

On note $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $\vec{b} = (-2,-3,3)$. Déterminer les coordonnées de $\vec{b}$ dans la base $\mathcal{B}$.

c) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$g\big((x,y,z)\big) = (4x+2y+3z, 11x+13y+21z, -8x-8y-13z).$$

Déterminer $g(\vec{a}_1)$, $g(\vec{a}_2)$ et $g(\vec{a}_3)$, puis la matrice de représentation $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ de g dans la base $\mathcal{B}$.

d) Soit $g^4 = g \circ g \circ g \circ g$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g^4)$. En déduire les coordonnées de $g^4(\vec{b})$ dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

e) On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ l'identité de $\mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(g - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ en fonction de λ. A quelle condition nécessaire et suffisante sur λ l'endomorphisme $g - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6 (1pt)**.** Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 17 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 (Exercice d'algorithmique, 4pts)**.** Soit k et n des entiers positifs supérieurs à 1, et A une matrice réelle carrée de taille $n \times n$.

a) Construire la fonction en langage C *double * multiplication_matrice (double * A, double * B, int n)* qui reçoit deux pointeurs de type double de taille n^2 correspondant aux matrices A et B et retourne un pointeur de type double de taille n^2 (il faudra allouer de la mémoire) correspondant à la matrice $C = A * B$. Le nombre de multiplications réelles utilisées par cette fonction doit être $O(n^3)$.

b) Soit $k \geq 2$ un entier puissance de deux. Construire une fonction récursive en C *double * exponentiation_matrice (double * A, int n, int k)* pour calculer la matrice carrée A^k de taille $n \times n$, c'est-à-dire, la matrice $A \times A \times \ldots \times A$, k fois (avant de répondre à cette question, lisez bien la question suivante concernant sa complexité en temps).

c) On fixe n. Soit $T(k)$ le nombre de multiplications de nombres réels effectuées par votre fonction. Ce nombre doit être borné, dans le pire des cas, par $O(n^3 \log_2 k)$. Pour le montrer, établir une relation de récurrence exprimant $T(k)$ en fonction de $T(k/2)$ et n, puis résoudre cette relation de récurrence pour prouver que $T(k) = n^3 \log_2 k$.