TD 1: systèmes linéaires

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2015-2016, 2ème semestre

Nombres complexes : révisions

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

a) $z^2 + 4z + 5 = 0$, b) $z^2 + (i-2)z - 3(i+1) = 0$, c) $z^3 = 8i$.

Exercice 2. Ecrire $\sqrt{3} + 3i$ sous forme trigonométrique. Ecrire $2e^{i\pi/4}$ et $3e^{i\pi/2}$ sous forme cartésienne.

Systèmes linéaires

Exercice 3.

a) Donner 2 solutions (x, y, z) de l'équation $3x + 4y - 2z = 2$. Décrire sous forme paramétrique l'ensemble des solutions (réelles) de cette équation.

b) Décrire sous forme paramétrique l'ensemble des solutions (réelles) du système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3. \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre les 3 systèmes suivants, d'inconnues complexes x et y :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1+i)x - 3iy = 2 \\ x - (i+1)y = -i \end{cases} \qquad \begin{cases} (2-i)x + iy = i \\ (2i+1)x - y = -1 \end{cases}$$

Exercice 5. Dans le Plan P muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considére les deux droites D_1 et D_2 d'équation respective : $x + y = 1$ et $3x - 2y = 3$. Déterminer les coordonnées du point A, intersection des droites D_1 et D_2. Donner la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite de P passant par A. Retrouver cette forme pour les équations de D_1 et D_2.

Exercice 6.

a) Les matrices suivantes sont-elles sous forme échelonnée ? Sous forme échelonnée réduite ?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

b) En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, mettre chacune des matrices précédentes sous forme échelonnée réduite.

c) Écrire les systèmes correspondant aux matrices de le question a). Déterminer les solutions de ces systèmes à l'aide de la question b).

Exercice 7.

a) Résoudre les systèmes suivants sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11 \\ -x_1 - 4x_2 - 6x_3 = -19 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 16y - 11z = -6 \\ -2x + 6y + 5z = -1 \\ x - 4y - 3z = 0 \end{cases} \begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 34 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ -2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes de matrices augmentées :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -9 & -25 & 30 & 49 \\ -3 & -9 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -6 \end{array}\right]$$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système linéaire suivant, d'inconnues x_1, x_2 et x_3 : Pour tout j variant de 1 à 3, $\sum_{k=1}^{3}(j-k)x_k = j$.

Exercice 9. Résoudre les systèmes suivants sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (1+i)x - y + 2iz = -7 - i \\ (2+2i)x + y + iz = 1 - 2i \\ (i-1)x - iy - z = -4i + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 3 + 2i - z_2 - (i-5)z_3 \\ iz_1 + 2iz_2 = (1+10i)z_3 - 4 + 3i. \end{cases}$$

Exercice 10. Pour chacune des matrices augmentées suivantes dire **sans aucun calcul** si le système correspondant a une solution, aucune solution ou une infinité de solutions :

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -2 & -3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 18 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 4 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Exercice 11.

a) Résoudre le système (réel) de matrice augmentée $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 10 & 0 \\ -2 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right]$. Est-ce un système de Cramer ?

b) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Combien de solutions a le système de matrice augmentée : $\left[\begin{array}{rrr|c} -1 & -1 & -3 & a \\ 3 & 2 & 10 & b \\ -2 & -1 & -8 & c \end{array}\right]$?

Résoudre ce système.

Exercice 12. A quelles conditions sur les réels a, b et c le système suivant est-il compatible ?

$$x + 2y = a, \quad x + y = b \quad \text{et} \quad 2x + 3y = c.$$

Exercice 13. Résoudre, selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants, d'inconnues réelles (x,y,z) :

$$\begin{cases} (2+a)x + 2y + (3+2a)z = 1 + 3a \\ -3y + (7-3a)z = 7a \\ (4+2a)x + 5y + (3+5a)z = 2 + 3a \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + (1-2a)y + a = 0 \\ 3x + (7a-4)y + 2z - 6 - 3a = 0 \\ (a-1)y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$$

Exercice 14. Le plan P est muni d'un repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a) Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$, $\vec{v}$ un vecteur d'affixe $v \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer l'affixe de l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$ et celui de l'image de M par la rotation de centre 0 et d'angle θ.

b) Déterminer selon $\theta \in \mathbb{R}$ tous les couples (M, M') de points du plan vérifiant simultanément les deux conditions suivantes :

— L'image de M par la rotation de centre 0 et d'angle θ est égale à l'image de M' par la translation de vecteur $\vec{e}_1$.

— L'image de M par la translation de vecteur $\vec{e}_2$ est égale à l'image de M' par la rotation de centre 0 et d'angle $-\pi/2$.

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 15. (Cours). Donner la définition d'un système de Cramer. Donner un exemple de système de Cramer à deux équations, deux inconnues.

Exercice 16. Résoudre n'importe quel "petit" système linéaire réel ou complexe.

Exercice 17. Résoudre, selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$, le système linéaire, d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + 2z = 4 \\ 2x + 2ay + 3z = 4. \end{cases}$$

Exercice 18. A quelles conditions sur les réels a, b et c le système suivant est-il compatible ?

$$\begin{cases} -3x - 4y - 7z = a \\ -x - 6y - 7z = b \\ x + 4y + 5z = c. \end{cases}$$

Exercice 19. Résoudre, selon les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$, le système suivant, d'inconnues complexes (x, y, z) :

$$\lambda x = 0, \quad \lambda y = 1, \quad iz = \lambda \quad \text{et} \quad x + y + z = 0.$$