TD 2: Matrices

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2015-2016, 2ème semestre

Exercice 1. On donne les matrices suivantes :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ; \; N = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad T = \begin{bmatrix} -1 \\ 4i \\ 1-i \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 1+i \end{bmatrix}.$$

a) Donner les coefficients suivants de la matrice M : $m_{2,1}$, $m_{3,2}$.
b) Calculer, lorsque c'est possible, les sommes suivantes : $M+N$; $N+P$; $T+U$; $T+{}^tU$.
c) Calculer, lorsque c'est possible, les produits suivants :

$$iN \,; 4T \,; MN \,; \; M^tN \,; \; MP \,; \; PM \,; \; UT \,; \; TU \,; U^2 \,; P^2.$$

d) A quelles conditions sur les dimensions des matrices A et B peut-on calculer la somme ${}^tA + B$?
e) A quelles conditions sur les dimensions des matrices A et B peut-on calculer le produit ${}^tA\,B$?

Exercice 2. On fixe $n \geq 2$. Soient les matrices :

- $B_n = [b_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ où $b_{i,j} = 0$ si $i < j$, $b_{i,j} = i - j$ sinon ;
- $C_n = [c_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ où
  $c_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$ ou si $i = j$,
  $c_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$.

a) Ecrire la matrice B_4 et la matrice C_4.
b) Calculer le produit B_3C_3. Calculer C_3^2.
c) Calculer C_n^2. On notera $[d_{i,j}]$ les coefficients de C_n^2 et on distinguera les cas $|i-j| > 2$, $|i-j| = 2$, $|i-j| = 1$ et $i = j$.

Exercice 3.
a) Calculer $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ pour $n \geq 1$.
b) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, En utilisant l'égalité $A = 4I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et en vérifiant que l'on peut utiliser la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 4. Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1+i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} z+i & 2 \\ -1 & z \end{bmatrix} \text{ en fonction du paramètre } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 5. Soit B une matrice telle que

$$B \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Donner les dimensions de B, puis déterminer B.

Exercice 6. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) On considère un système linéaire (S) homogène à 3 équations et 2 inconnues sur $\mathbb{K}$. Le système (S) est-il compatible ? Combien a-t-il de solution(s) ?

b) Soit $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}$, *non nul*, tel que $BX = 0$.

c) En déduire qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_3$.

Exercice 7. Soit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice 3×3 $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calculer $R_\theta R_\sigma$ pour $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$.

b) La matrice R_θ est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

c) Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ un point de $\mathbb{R}^3$. Interpréter géométriquement $R_\theta X$. Les résultats précédents sont-ils cohérents avec cette interprétation géométrique ?

Exercice 8. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant que ces matrices sont des matrices élémentaires, calculer :

$$C^n, \ (n \in \mathbb{N}) \qquad AB^4C^3A \qquad C^4B^3C^2.$$

Exercice 9.

a) En utilisant la méthode du pivot, dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 8 & -9 \\ -3 & -5 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 14 \\ -2 & -4 & -20 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Le système suivant est-il un système de Cramer ?

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = a \\ 3x + 8y - 9z = b \\ -3x - 5y + 5z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système.

Exercice 10.
a) A quelle condition sur le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice suivante est-elle inversible ? Calculer son inverse lorsqu'elle est inversible.

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 7+2\lambda & 12-4\lambda \\ 1 & 4+\lambda & 9-3\lambda \\ 2 & 9+2\lambda & 21-7\lambda \end{bmatrix}$$

b) A quelle condition sur λ le système suivant (d'inconnues réelles x, y, z) a-t-il une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} 2x + (7+2\lambda)y + (12-4\lambda)z = 3 \\ x + (4+\lambda)y + (9-3\lambda)z = 2 \\ 2x + (9+2\lambda)y + (21-7\lambda)z = 5 \end{cases}$$

Exercice 11. Déterminer les inverses des matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 1,01 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. A votre avis, quel problème se pose si on calcule l'inverse d'une matrice en remplaçant chacun de ses coefficients par une valeur approchée ?

★ **Exercice 12.** Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On appelle trace de A, et on note $\operatorname{tr} A$ la somme $a_{11} + a_{22}$.
a) Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ et $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.
b) Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
c) Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$AB - BA = I_2.$$

d) Soit $n \geq 2$. Si $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Généraliser les questions précédentes aux matrices $n \times n$.

★ **Exercice 13.** Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AB = BA. \tag{1}$$

a) Soit $(k, \ell) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$. On note $E_{k,\ell}$ la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (k, ℓ) qui vaut 1. Calculer les coefficients de $AE_{k,\ell}$ et $E_{k,\ell}A$.
b) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Montrer réciproquement que les matrice $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifient la propriété (1).

https ://www.math.univ-paris13.fr/d̃uyckaer/enseignement.html

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 14. On considère les matrices

$$A = [i-j]_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Calculer, quand c'est possible, les matrices suivantes

$$AB, \quad BA, \quad A+B, \quad A^2, \quad C^2, \quad {}^tA + 2B, \quad AC, \quad {}^tAC, \quad AD, \quad DA \text{ etc...}$$

(ou tout autre somme, produit ou transposée de matrices explicites.

Exercice 15. Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer A^2. Calculer A^n pour tout n (on pourra distinguer selon la parité de n).

Exercice 16. Question de cours : montrer l'associativité de la multiplication matricielle (cf polycopié : théorème II.1.31, i, et la démonstration p.20).

Exercice 17. Les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 13 \\ -3 & -2 & -14 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 14 & -8 & 3 \\ -7 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1+3i & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1-i & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

sont-elles inversibles ? Donner l'inverse des matrices qui le sont. *(Même question possible avec d'autres petites matrices carrées explicites).*