TD 3: polynômes

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2015-2016, 2ème semestre

Exercice 1. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Donner les degrés des polynômes suivants : $P^4 + 2P^3$, $P'P''$, $P - (P')^2$.

Exercice 2. Effectuer la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

a) $A = X^3,\ B = X + 2$ b) $A = X^3 + X^2 + X - 1,\ B = X^2 + iX + 1$
c) $A = X + 1,\ B = X^3 + X^2$ d) $A = 2X^5 + 4X^4 - 1,\ B = 2X^3 + 2X + 1$.

Exercice 3. A l'aide d'une division euclidienne, déterminer pour quels réels a le polynôme $P = X^5 + X^4 + aX^2 - 1$ est divisible par $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 4.
a) Montrer en effectuant une division euclidienne que le polynôme $P = X^4 + 2X^3 - 4X - 4$ est divisible par $X^2 + 2X + 2$.
b) Calculer les racines de $X^2 + 2X + 2$. Montrer que ce sont aussi des racines de P. En déduire une autre démonstration du résultat de la question précédente.

Exercice 5. Soit P le polynôme $X^8 + 3X^4 + 2$.
a) Le polynôme P a-t-il des racines réelles ?
b) Déterminer les racines complexes de P et leur ordre de multiplicité.

Exercice 6. Soit $P = X^3 - (1 + 3i)X^2 + (-3 + 2i)X + 1 + i$.
a) Montrer que i est racine de P et donner son ordre de multiplicité.
b) Déterminer toutes les racines de P et leur ordre de multiplicité.

Exercice 7. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4$.
a) Montrer que 2 est racine de P et donner son ordre de multiplicité.
b) Déterminer toutes les racines réelles, puis toutes les racines complexes de P et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 8. Montrer que le polynôme $X^5 + 3X^3 + 2X - 4$ a une et une seule racine réelle. On ne demande pas de calculer cette racine.

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soient a et b deux nombres complexes *distincts*. Calculer le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

★ **Exercice 10.**

a) Calculer $\cos(5a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$, puis seulement en fonction de $\cos(a)$.

b) A l'aide de la question précédente, montrer

$$\left(X-\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(X-\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(X+\cos\frac{3\pi}{10}\right)=X^4-\frac{5}{4}X^2+\frac{5}{16}.$$

c) D'après la question (b), il existe un polynôme non nul P, à coefficients entiers, tel que

$$P\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)=0.$$

Soit m et n des entiers naturels avec $n \neq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme Q non nul, à coefficients entiers, tel que

$$Q\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right)=0.$$

On dit que $\cos\frac{m\pi}{n}$ est *algébrique.*

Pour d'autres exercices sur les polynômes, on pourra consulter la feuille de TD 2 de 2014 :

`https://www.math.univ-paris13.fr/~duyckaer/enseignement/L1_2014_TD2.pdf`

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 11. Déterminer toutes les racines du polynômes X^4-6X^2-8X-3 avec leurs ordres de multiplicité. On pourra commencer par chercher une racine évidente.

Exercice 12. Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de X^3+3X^2+2X+1 par $X+1$ (ou toute autre division euclidienne de polynômes).

Exercice 13. Soit P le polynôme

$$P = X^4-2iX^3-3X^2+4iX+2.$$

a) Montrer que i est une racine de P. Déterminer son ordre de multiplicité.

b) Déterminer toutes les racines complexes de P avec leurs ordres de multiplicité.