TD 4: espaces vectoriels I
Sous-espaces vectoriels, familles libres, familles génératrices

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2015-2016, 2ème semestre

Exercice 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, précisez lesquels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

$$F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1\right\}; \quad F_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + 2y \leqslant 0\right\};$$
$$F_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0\right\}; \quad F_4 = \left\{(x + 1, x + y - 2, x - y)\,;\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\right\};$$
$$F_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + z = -y\right\}; \quad F_6 = \left\{(s, 0, 2s + t)\,;\,(s, t) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 2.

2.1. Soit E l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + 2y - z = 0$. Justifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E?

$$F_1 = \{(\lambda, 3\lambda, 2\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

La droite F_2 engendrée par le vecteur $\vec{v} = (3, 1, 5)$.

$$F_3 = \text{vect}\Big((0, 1, 2), (1, -1, -1)\Big), \quad F_4 = \{(\lambda + 1, \lambda - 1, 3\lambda - 1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Exercice 3. Soit E défini par

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3,\ x + y - iz = 0\right\}.$$

3.1. Justifier que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

3.2. Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation $x + y - iz = 0$ sous forme paramétrique.

3.3. Donner deux vecteurs qui engendrent E.

Exercice 4. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

- $P_x = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\,x = 0\right\}$, $P_y = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\,y = 0\right\}$, $P_z = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\,z = 0\right\}$.
- D_x est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{i} = (1, 0, 0)$,
- D_y est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{j} = (0, 1, 0)$,
- D_z est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{k} = (0, 0, 1)$,

4.1. D_x est-il un sous-espace vectoriel de P_x (respectivement de P_y, de P_z)?

4.2. Montrer (au choix) que $P_x \cap P_y = D_z$, que $P_y \cap P_z = D_x$, que $P_z \cap P_x = D_y$.

4.3. Montrer (au choix) que $D_x \oplus D_y = P_z$, que $D_y \oplus D_z = P_x$, que $D_z \oplus D_x = P_y$.

4.4. Montrer (au choix) que $P_x + P_y = \mathbb{R}^3$, que $P_y + P_z = \mathbb{R}^3$, que $P_z + P_x = \mathbb{R}^3$.

4.5. Montrer (au choix) que $P_x \oplus D_x = \mathbb{R}^3$, que $P_y \oplus D_y = \mathbb{R}^3$, que $P_z \oplus D_z = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Rappeler la définition d'une famille libre. Déterminer si chacune des familles suivantes de l'espace vectoriel E est une famille libre.

5.1. $\Big((1,2,-1),(5,3,2),(3,-1,4)\Big)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.

5.2. $\Big((1,-1,2),(3,-4,2),(-1,5,m)\Big)$ dans $E = \mathbb{R}^3$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

5.3. $\Big((i,1+i,2),(i-1,2i,2+2i)\Big)$ dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$.

5.4. $\Big((1,2,-i),(4,4i,2),(i,0,1)\Big)$ dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$.

Exercice 6. Rappeler la définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles génératrices dans l'espace vectoriel E indiqué?

6.1. $\Big((1,0),(0,1),(1,1),(2,3)\Big)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.

6.2. $\Big((1,i),(i,-1),(1+i,i-1)\Big)$ dans $E = \mathbb{C}^2$.

6.3. $\Big((-1,1,0),(1,0,1)\Big)$ dans $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y-z=0\}$.

★ **Exercice 7.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

7.1. Montrer que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est libre si et seulement si la famille $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w})$ est libre.

7.2. Que se passe-t-il si l'on remplace la famille $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w})$ par la famille $(\vec{u}-\vec{v},\vec{u}-\vec{w},\vec{v}-\vec{w})$ dans l'assertion précédente?

Exercices à préparer pour le contrôle continu.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 8. Rappeler les définitions d'un sous-espace vectoriel de E, d'une famille libre de E, d'une famille génératrice de E.

Exercice 9. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 10. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner la définition de $F+G$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.