

TD 5: espaces vectoriels II

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2015-2016, 2ème semestre

Exercice 1.

a) Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 d'équation cartésienne $x + y - 2iz = 0$. Donner la dimension et une base de E .

b) Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 d'équations cartésiennes $x_1 + 3x_2 - x_4 = 0$ et $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Donner la dimension et une base de E .

Exercice 2. On considère les sous-espaces vectoriels E, F, G et H de \mathbb{R}^3 définis par :

$$E = \text{vect}((0, 0, 1), (1, 1, 3)), \quad F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = x_3\}$$

$$G = \text{vect}((1, 0, 1)), \quad H = \text{vect}((1, 1, 0)).$$

Déterminer une base et la dimension de

$$F \cap G, \quad G \cap H, \quad F \cap H, \quad E \cap F$$

puis une base et la dimension de

$$F + G, \quad G + H, \quad F + H, \quad E + F.$$

Déterminer si les espaces F et G (respectivement G et H ; F et H ; E et F) sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 3. Soit

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}, \quad F = \text{vect}\{(1, 1, 2, 0)\}$$

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 = x_4\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , puis que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 4. Soit $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 3, 1)$ et F le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par \vec{u} et \vec{v} .

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Fixons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition sur (x, y, z) le système

$$a\vec{u} + b\vec{v} = (x, y, z),$$

d'inconnues réelles a et b est-il compatible ? En déduire une description cartésienne de F .

c) Déterminer par un raisonnement analogue une description cartésienne du sous-espace de \mathbb{C}^4 $\text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u} = (1, 0, -i, i)$ $\vec{v} = (i, 1, 1, i - 1)$.

Exercice 5.

a) Résoudre, selon le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} x + (\lambda + 1)y + (\lambda + 3)z = 0 \\ 2x + (\lambda + 1)y + (\lambda + 5)z = 0. \end{cases}$$

b) Soit E_λ l'espace vectoriel des solutions de (S_λ) . Déterminer, en distinguant selon les valeurs de λ , une base et la dimension de E_λ .

Exercice 6. Donner le rang des familles de vecteurs suivantes. En extraire une famille libre.

$$\mathcal{F}_1 = \left((2, 2), (-1, -1), (-1, 2), (2, -6), (3, -6) \right), \quad \mathcal{F}_2 = \left((1, -1, 2), (4, 2, 9), (2, 4, 5) \right), \\ \mathcal{F}_3 = \left((1, 0, 0, 1), (2, -1, -1, 3), (3, -1, 1, 4), (4, -1, 1, 5) \right).$$

Exercice 7. Montrer que les familles suivantes sont libres. Les compléter en une base de \mathbb{R}^3 (respectivement de \mathbb{R}^4) :

$$\mathcal{F} = \{(1, 2, 3), (-1, 2, -2)\}, \quad \mathcal{G} = \{(2, 1, 0, 3), (-4, 1, 2, -1)\}.$$

Exercice 8. Soit $\vec{u}_1 = (-3, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (-6, 6, 1)$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

b) Exprimer les coordonnées d'un point (x_1, x_2, x_3) de \mathbb{R}^3 dans la base \mathcal{B} .

Exercice 9. Soit $n \geq 2$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de \mathbb{R}^n :

$$F = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\} \text{ et } G = \text{vect}((1, 1, \dots, 1)).$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^n .

Exercices à préparer pour le contrôle continu.

Exercice 10 (Question de cours). Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E . Soit $\vec{v} \in E$. Montrer que \mathcal{F} est libre si et seulement si

$$\vec{v} \notin \text{vect } \mathcal{F}.$$

Exercice 11. Soit λ un paramètre réel. On considère les deux sous-espaces vectoriels suivants de \mathbb{R}^3 :

$$F = \text{vect}((1, 0, \lambda)), \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

Déterminer selon la valeur du paramètre λ une base et la dimensions de $F \cap G$ puis une base et la dimension de $F + G$. A quelle condition sur λ ces deux espaces sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

Exercice 12. On considère les vecteurs de \mathbb{R}^4 :

$$\vec{u}_1 = (-2, 2, -1, -1), \quad \vec{u}_2 = (1, -1, 0, 1), \quad \vec{u}_3 = (-2, 1, -1, -1).$$

En utilisant la méthode de l'exercice 4, donner une description cartésienne du sous-espace de \mathbb{R}^4 : $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.