L1, algèbre linéaire
2015/2016 Université
Mathématiques Paris 13

TD 7: déterminant, réduction des endomorphismes

Calcul de déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 17 & 18 \\ 1 & 18 & 19 \\ 1 & 19 & 20 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants en développant par rapport à une ligne ou une colonne:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants par des manipulations sur les lignes ou les colonnes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix},$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

Exercice 4. Soit $\vec{x} = (1, 0, -1)$, $\vec{y} = (3, 2, 1)$ et $\vec{z} = (1, 1, a)$. Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles:

$$A_m = \begin{bmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{bmatrix}, \qquad B_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

Pour quelles valeurs des paramètres réels a, b, c et d la matrice suivante est-elle inversible

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ a & b & a+b & 2a+2b \\ a & b & c & a+b+c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}?$$

Réduction des endomorphismes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E. On peut montrer que

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \, \mathrm{id}_E)$$

est un polynôme de degré n en λ, appelé polynôme caractéristique de f. Les zéros de ce polynômes (dans $\mathbb{K}$) sont appelés *valeurs propres* de f. Si λ est une telle valeur propre, l'espace vectoriel

$\ker(f-\lambda\,\mathrm{id}_E)$ (non réduit à $\{\vec{0}_E\}$) est appelé *sous-espace propre* de f pour la valeur propre λ. Les éléments non nuls de ce sous-espace propre sont appelés *vecteurs propres* pour la valeur propre λ.

Réduire l'endomorphisme f, c'est trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ a une forme simple. Lorsque E admet une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est diagonale, on dit que f est *diagonalisable*. De même, lorsqu'il existe $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, on dit que f est *trigonalisable*.

Exercice 6. On suppose $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ diagonale. Vérifier que les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de f.

Exercice 7. On fixe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, pour chacun des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrices de représentation les matrices suivantes dans $\mathcal{B}$, le polynôme caractéristique, les valeurs propres et leurs ordres de multiplicité.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 8. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 \\ -4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Vérifier que les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (3,2,1)$ et $\vec{v}_3 = (0,1,0)$ sont des vecteurs propres de f. Déterminer les valeurs propres associées.

b) Justifier que la famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice A' de f dans $\mathcal{B}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 9. Soit f l'endormorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x+2y, 2x+y)$.

a) Donner la matrice A de f dans la base canonique.

b) Déterminer les valeurs propres de f et les vecteurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

c) Mêmes questions pour l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(x,y,z) = (x-y-z, 2y-z, 3z)$.

d) Calculer $f^{10} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$

Exercice 10.

a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer les valeurs propres de f. Est-ce que f est diagonalisable?

b) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ ayant pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Calculer les valeurs propres de g. Est-ce que g est diagonalisable?

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (-4x-2z, y, 5x+y+3z)$.

a) Déterminer les valeurs propres de f.

b) Pour chacune de ces valeurs propres, donner une base et la dimension du sous-espace propre associé. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

c) Montrer que $f \circ f$ admet 1 pour valeur propre et calculer le sous-espace propre associé.

d) Montrer que f est trigonalisable.