Algèbre linéaire et algorithmique.
Correction du partiel n°2.

Exercice 1

a) Par définition, $\mathcal{F}$ est une famille libre quand :
$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n ; \quad \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

b) On suppose que $\mathcal{F} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est libre.

- Supposons d'abord que $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}, \vec{v})$ est une famille libre. Alors $1.\vec{v} - \lambda_1 \vec{e_1} - \dots - \lambda_n \vec{e_n} \neq \vec{0}_E$ (c'est une combinaison linéaire dont le premier coefficient est non nul), quelque soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
On a donc $\vec{v} \notin \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$

- Réciproquement, supposons $\vec{v} \notin \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que
$$\lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} + \lambda_{n+1} \vec{v} = \vec{0}_E$$
Alors $\lambda_{n+1} = 0$ (sinon on aurait $\vec{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \vec{e_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} \vec{e_2} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \vec{e_n} \in \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$)
Donc $\lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0}_E$ ce qui montre, la famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ étant libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exercice 2

A est une matrice 3×3 et B une matrice 3×2

Donc AB est bien définie et c'est une matrice 3×2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} -11 & -14 \\ -2 & -2 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Exercice 3

a) Le système s'écrit :

$$\begin{cases} 3a - 2b = x \\ -a + 4b = y \\ -a - b = z \end{cases} \iff \begin{cases} -5b = x + 3z & (L_1) + 3(L_3) \\ 5b = y - z & (L_2) + (L_3) \\ -a - b = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = x + y + 2z & (L_1) + 2(L_2) \\ 5b = y - z \\ -a - b = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a - b = z \\ 5b = y - z \\ 0 = x + y + 2z \end{cases}$$

Le système obtenu étant échelonné, on voit qu'il est compatible si et seulement si $x + y + 2z = 0$

F a donc pour équation cartésienne :
$x + y + 2z = 0$

b) $4 - 1 + 2\times 3 = 9 \neq 0$. Donc $\vec{u_3} \notin F$

$F \cap G$ est un sous espace vectoriel de $G = \mathrm{Vect}(\vec{u_3})$ qui ne contient pas $\vec{u_3}$. Donc $\dim(F\cap G) < 1 = \dim G$
$F \cap G = \{\vec{0}_E\}$

c) $\cdot \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$

$= 2 + 1 - 0$

$= 3$

On a utilisé que $\dim F = 2$, les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ étant non colinéaires

Exercice 4

a) $\begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 1 & 2i & 0 \\ 0 & i & -1 \end{bmatrix}$

b) $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x + iy + z = 0 \\ y + iz = 0 \\ x + 2iy = 0 \\ iy - z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + iy + z = 0 \\ y + iz = 0 \\ iy - z = 0 & (L_3) - (L_1) \\ iy - z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + iy + z = 0 \\ y + iz = 0 \end{cases}$

(on a remarqué que les lignes (L_3) et (L_4) étaient identiques, égales à $+i(L_2)$)

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x + 2z = 0 & (L_1) - i(L_2) \\ y + iz = 0 \end{cases}$

$$\operatorname{Ker} f = \{(-2z, -iz, z) \; ; \; z \in \mathbb{C}\}$$
$$= \operatorname{Vect}((-2, -i, 1))$$

$\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1, et a pour base $((-2, -i, 1))$.

$\operatorname{Ker} f \neq \{\vec{0}\}$ donc f n'est pas injective.

c) . $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{C}^3 = 3$ (théorème du rang)

donc $\dim \operatorname{Im} f = 2$

. L'image de f est engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice de f dans les bases canoniques. Pour obtenir une base de $\operatorname{Im} f$, il suffit de choisir 2 vecteurs colonnes indépendants parmi les vecteurs, par exemple $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\1\\2i\\i\end{pmatrix}\right)$

$\dim \operatorname{Im} f = 2 < \dim \mathbb{C}^4 = 4$

Donc f n'est pas surjective.

Exercice 5

a) B est une famille de 3 vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de dimension 3. Pour vérifier que c'est une base, il suffit par exemple de montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ est non nul.

Un calcul direct (règle de Sarrus) montre que ce déterminant vaut : $-2+3-2=-1$, ce qui montre bien que B est une base.

b) On voit que $\vec{b} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3}$

(on pouvait aussi résoudre le système d'équations $x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} = \vec{0}$)

les coordonnées de $\vec{b}$ dans B sont donc $(1,1,1)$

c) $g(\vec{a_1}) = (-3,-3,3) = 3\vec{a_1}$ $\quad g(\vec{a_2}) = (-2,2,0) = 2\vec{a_2}$

$g(\vec{a_3}) = (0,3,-2) = -\vec{a_3}$

On en déduit $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) On a : $Mat_{B,B}(g^4) = (Mat_{B,B}(g))^4$

$$= \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les coordonnées de $g^4(\vec{b})$ dans la base B sont :

$$Mat_{B,B}(g^4)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc $g^4(\vec{b}) = 81\vec{a_1} + 16\vec{a_2} + \vec{a_3}$

$= (-97, -68, 83)$

ce qui donne les coordonnées de $\vec{f}$ dans la base canonique.

e) $\det(g - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3}) = \det(P - \lambda I_3)$

$$= (3-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$g - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si ce déterminant est non nul, i.e $\lambda \notin \{-1, 2, 3\}$

Exercice 6

On développe le déterminant par rapport à la deuxième colonne, ce qui donne :

$$-2\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2)-2(L_1) \\ (L_3)-(L_1) \end{matrix}$$

$$= (-2)\times(-1)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -4$$