ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2016-2017

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Il est possible de traiter une question en admettant les résultat des questions précédentes.

L'exercice d'algorithmique doit être traité sur une feuille à part.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q)$ une famille de vecteurs de E.

a. Donner la définition de "$\mathcal{F}$ est libre", de "$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E" et de "$\mathcal{F}$ est une base de E".

b. Donner un exemple d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, non vide, libre, et non génératrice.

c. Soit f une application de E dans F. Donner la définition de "f est une application linéaire de E dans F". *On suppose dans les questions suivantes que f est une application linéaire de E dans F.*

d. Rappeler la définition du noyau de f et celle de l'image de f.

e. Soit p la dimension et $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$ une base de l'image de f. Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de E tels que

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad f(\vec{v}_j) = \vec{w}_j.$$

Soit n la dimension et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base du noyau de f. Montrer que

$$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$$

est une base de E.

f. Quelle relation entre les dimensions du noyau de f, de l'image de f et de E a-t-on démontrée ?

Exercice 2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donné par la formule

$$f\big((x, y, z)\big) = (-9x - 5y - 14z, -3x - 2y - 5z, 7x + 4y + 11z).$$

a. Déterminer une base et la dimension du noyau $\operatorname{Ker} f$ de f. En déduire la dimension de l'image de f.

b. Donner une base de l'image $\operatorname{Im} f$ de f.

c. Déterminer une description cartésienne de l'image de f.

d. Déterminer $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Ces deux espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?

Date: Mardi 20 juin 2017.

Exercice 3.

a. Soit P et Q deux matrices carrées de même taille, et $n \geq 1$ un entier. Donner une condition suffisante sur P et Q pour que la formule du binôme donnant $(P+Q)^n$ en fonction des puissances de P et Q soit valable. Rappeler cette formule.

b. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer N^2, puis N^k, pour $k \geq 3$.

c. En déduire A^2, et A^k pour $k \geq 3$.

Exercice 4.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$ Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} -x & -2 & 0 \\ 1 & 3 & x \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

En fonction de x.

b. Déterminer pour quelles valeurs de x la famille $\mathcal{F} = \Big((-x,1,1),(-2,3,1),(0,x,-2)\Big)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Soit $\vec{u}_1 = (-1,1,1)$, $\vec{u}_2 = (-2,3,1)$, $\vec{u}_3 = (0,1,-2)$ et $\vec{v} = (-13,6,3)$. Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de v dans cette base.

d. Soit f l'application linéaire de matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dans la base canonique. Calculer $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$.

e. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

f. A l'aide de l'exercice 3, déterminer la matrice de $f^{10} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{10 fois}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

g. Calculer les coordonnées de $f^{10}(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base canonique.

Exercice 5. Soit $P = X^5 - 5X^4 + 2X^3 - 10X^2 + X - 5$.

a. Montrer que i est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité. Est-ce que $-i$ est une racine de P ? Justifier.

b. Déterminer toutes les racines de P et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 6. Écrire en C la fonction `float* kro(float* A,float* B, int n)` qui prend en argument deux matrices $n \times n$ (pointées par `A` et `B`) et renvoie un pointeur sur une matrice $n \times n$ donc chaque coefficient est le produit des coefficients à la même place dans `A` et `B`.