ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2016-2017

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Il est possible de traiter une question en admettant les résultat des questions précédentes.

L'exercice d'algorithmique doit être traité sur une feuille à part.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q)$ une famille de vecteurs de E.

a. On dit que $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q)$ est **libre** quand pour tout q-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^q$, on a :

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E \Longrightarrow \forall j \in \{1, \dots, q\},\ \lambda_j = 0.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est **une famille génératrice** de E quand pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, il existe un q-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^q$ tel que

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{v}.$$

Enfin, on dit que $\mathcal{F}$ est une base de E quand c'est une famille libre et génératrice de E. Une définition équivalente est que pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, il existe un **unique** q-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^q$ tel que

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{v}.$$

b. Toute famille de 1 seul vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ est libre et non génératrice. Par exemple $\mathcal{L} = \Big((1, 0, 0)\Big)$ est une famille libre, non vide et non génératrice de $\mathbb{R}^3$. Une famille de deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$ faisait aussi l'affaire.

c. On dit que f est une **application linéaire** de E dans F quand

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}).$$

d. Si f est une application linéaire de E dans F, le **noyau** de f est défini par :

$$\operatorname{Ker} f = \Big\{ \vec{x} \in E \ :\ f(\vec{x}) = \vec{0}_F \Big\}$$

et l'image de f est définie par :

$$\operatorname{Im} f = \Big\{ f(\vec{x}),\ \vec{x} \in E \Big\}.$$

Date: Mardi 20 juin 2017.

e. Soit $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$ une base de l'image de f. Il découle immédiatement de la définition de $\operatorname{Im} f$ qu'il existe une famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs de E tels que

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad f(\vec{v}_j) = \vec{w}_j.$$

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base du noyau de f. Montrons que

$$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$$

est une base de E. (Cf POLY ****************)

On montre d'abord que $\mathcal{B}$ est libre. Supposons qu'il existe un élément

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p)$$

de $\mathbb{K}^{n+p}$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \vec{v}_k = \vec{0}_E. \tag{1}$$

En applicant f à l'égalité précédente et en utilisant que $f(\vec{u}_j) = \vec{0}_F$ pour tout j, et $f(\vec{v}_k) = \vec{w}_k$ pour tout k, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k \vec{w}_k = \vec{0}_F.$$

En utilisant que la famille $(\vec{w}_k)_{1 \leq k \leq p}$ est libre, on en déduit

$$\forall k = 1, \dots, p, \quad \mu_k = 0.$$

En revenant à l'égalité (1), on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E,$$

et, puisque $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. On a bien montré que $\mathcal{B}$ était libre.

Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. Soit $\vec{v} \in E$. Puisque $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, il existe $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k \vec{w}_k = f(\vec{v}).$$

Cela s'écrit aussi

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k f(\vec{v}_k) = f(\vec{v}),$$

ou encore

$$f\left(\vec{v} - \sum_{k=1}^{p} \mu_k \vec{v}_k\right) = \vec{0}_F.$$

Ceci signifie exactement que $\vec{v} - \sum_{k=1}^{p} \mu_k \vec{v}_k$ est dans le noyau de f. Puisque $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de ce noyau, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\vec{v} - \sum_{k=1}^{p} \mu_k \vec{v}_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j.$$

On a écrit un élément quelconque de E comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une base de E.

f. On a trouvé une base de E à $n + p$ éléments. Ceci implique le théorème du rang :

$$\dim E = n + p = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f.$$

Exercice 2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donné par la formule

$$f\big((x,y,z)\big) = (-9x - 5y - 14z, -3x - 2y - 5z, 7x + 4y + 11z).$$

a. Le noyau $\operatorname{Ker} f$ de f est l'ensemble des solutions du système linéaire à 3 équations et 3 inconnues :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} -9x - 5y - 14z = 0 \\ -3x - 2y - 5z = 0 \\ 7x + 4y + 11z = 0. \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss. On choisit la deuxième ligne comme ligne pivot. On commence donc par échanger les deux premières lignes. On obtient que (S) est équivalent à

$$\begin{cases} -3x - 2y - 5z = 0 \\ -9x - 5y - 14z = 0 \\ 7x + 4y + 11z = 0. \end{cases}$$

Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) + \frac{7}{3}(L_1)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} -3x - 2y - 5z = 0 \\ y + z = 0 \\ -\dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{3}z = 0. \end{cases}$$

On remarque que $(L_3) = -\frac{2}{3}(L_3)$. On obtient donc un système équivalent en retirant la troisième ligne au système précédent. On a alors un système échelonné, que l'on transforme en système échelonné réduit par l'opération $(L_1) \leftarrow (L_1) + 2(L_2)$. On a obtenu que le système (S) est équivalent à :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Le noyau de f est l'ensemble des solutions de ce système, que l'on peut décrire en choisissant z comme paramètre :

$$\operatorname{Ker} f = \left\{(-z, -z, z)\,,\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

On peut réécrire cette égalité

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\Big((-1, -1, 1)\Big).$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est un espace vectoriel de dimension 1, de base $\Big((-1, -1, 1)\Big)$.

Par le théorème du rang (cf exercice 1 question **f**), la dimension de l'image de f est $3 - 1 = 2$.

b. L'image de f est de dimension 2. Toute famille libre a 2 éléments de $\operatorname{Im} f$ est donc une base de $\operatorname{Im} f$.

$$f\big((1,0,0)\big) = (-9, -3, 7), \quad f\big((0,1,0)\big) = (-5, -2, 4).$$

Les vecteurs $(-9, -3, 7)$ et $(-5, -2, 4)$ sont donc dans $\operatorname{Im} f$. De plus, ces vecteurs ne sont pas colinéaires. La famille $\mathcal{F} = \big((-9, -3, 7), (-5, -2, 4)\big)$ est donc libre. C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$.

c. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. D'après la question précédente,

$$(x,y,z) \in \operatorname{Im} f \iff (x,y,z) \in \operatorname{Vect} \mathcal{F} \iff \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (x,y,z) = s(-9,-3,7) + t(-5,-2,4).$$

On en déduit que (x, y, z) est un vecteur de $\operatorname{Im} f$ si et seulement si le système suivant, d'inconnues (s, t), est compatible :

$$\begin{cases} -3s - 2t = y \\ -9s - 5t = x \\ 7s + 4t = z. \end{cases} \tag{2}$$

(on a échangé les deux premières lignes). Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) + \frac{7}{3}(L_1)$, puis $(L_3) \leftarrow 3(L_3)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} -3s - 2t = y \\ \qquad\quad t = x - 3y \\ \qquad -2t = 3z + 7y. \end{cases} \tag{3}$$

Par l'opération $(L_3) \to (L_3) + 2(L_2)$, ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} -3s - 2t = y \\ \qquad\quad t = x - 3y \\ \qquad\quad 0 = 2x + y + 3z. \end{cases} \tag{4}$$

C'est un système échelonné, qui est compatible si et seulement si $2x + y + 3z = 0$. On a obtenu :

$$\operatorname{Im} f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y + 3z = 0\right\}.$$

(Il est bien sûr conseillé au lecteur de vérifier que les vecteurs $(-9, -3, 7)$ et $(-5, -2, 4)$ sont solutions de l'équation $2x + y + 3z = 0$).

d. D'après la question **a**, $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1. L'espace vectoriel $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\operatorname{Ker} f$, c'est donc ou bien $\{\vec{0}\}$, ou bien $\operatorname{Ker} f$ lui même. Or $(-1, -1, 1)$, qui est un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} f$, est, d'après la question **b**, également un élément de $\operatorname{Im} f$. Donc

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((-1, -1, 1)\big).$$

Etant donné que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$, on a aussi :

$$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((-9, -3, 7), (-5, -2, 4)\big).$$

Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires, leur intersection n'étant pas réduite à $\{\vec{0}\}$.

Exercice 3.

a. Soit P et Q deux matrices carrées de même taille, et $n \geq 1$ un entier. Si P et Q commutent (i.e. si $PQ = QP$), on a la formule du binôme :

$$(P + Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}.$$

b. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par la formule de multiplication des matrices :

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par une récurrence évidente, on en déduit :

$$\forall k \geq 3, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

c. Notons I_3 la matrice identité 3×3. On remarque que $A = I_3 + N$, et que $I_3 N = N = N I_3$. On peut donc utiliser la formule du binôme :

$$(A+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k N^{n-k}$$

A^2, et A^k pour $k \geq 3$.

Exercice 4.

a. Soit

$$D(t) = \begin{vmatrix} -t & -2 & 0 \\ 1 & 3 & t \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

On calcule $D(t)$ à l'aide de la règle de Sarrus :

$D(t) = -t \times 3 \times (-2) + (-2) \times t \times 1 + 0 - (-2) \times 1 \times (-2) - 0 - \times (-t) \times t \times 1 = 6t - 2t + 4 + t^2 = t^2 + 4t - 4.$

Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut 32. On a donc :

$$D(t) = 0 \iff \left(x = -2 + 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -2 - 2\sqrt{2} \right).$$

b. Soit

$$\vec{u}_1 = (-1, 1, 1), \quad \vec{u}_2 = (-2, 3, 1), \quad \vec{u}_3 = (0, 1, -2)$$

et

$$\vec{v}_1 = (-3, 4, 2), \quad \vec{v}_2 = (-2, 4, -1).$$

La famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. C'est une base si et seulement si le déterminant 3×3 sont les colonnes sont les coordonnées de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ est non nul. Ce déterminant est exactement $D(1)$, qui est non nul d'après la question précédente. On a bien montré que $\mathcal{B}$ est une base.

En résolvant le système linaire ***** COMPLETER**** On obtient que les coordonnées de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{B}$ sont respectivement $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c. Soit f l'application linéaire de matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dans la base canonique. On a donc, par définition :

$$f\big((x, y, z)\big) = (2x + z, -3x - 2z, x + y + z).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= (-1,1,0) & &= \vec{u}_1 \\ f(\vec{u}_2) &= (-3,4,2) & &= \vec{v}_1 \\ f(\vec{u}_3) &= (-2,4,-1) & &= \vec{v}_2. \end{aligned}$$

d. D'après les deux questions précédentes,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

.

e. La matrice de $f^{10} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{10 \text{ fois}}$ dans la base $\mathcal{B}$est $C^{10} = A^{10}$. D'après l'exercice 3, cette matrice vaut :

$$C^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 45 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

f. Les coordonnées de $f^{10}(\vec{v}_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$C^{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$f^{10}(\vec{v}_1) = \vec{u}_1 + 10\vec{u}_2 = (-21, 31, 11),$$

ce qui donne les coordonnées de $f^{10}(\vec{v}_1)$ dans la base canonique.

Exercice 5. Soit $P = X^5 - 5X^4 + 2X^3 - 10X^2 + X - 5$.

a. En utilisant que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ et $i^5 = i$, que $P' = 5X^4 - 20X^3 + 6X^2 - 20X + 1$ et $P'' = 20X^3 - 60X^2 + 12X - 20$, on obtient :

$$P(i) = P'(i) = 0, \quad P''(i) = 40 - 8i \neq 0.$$

Donc i est une racine double de P. Le polynôme P est à coefficients réels. Le conjugué d'une racine de P est donc également une racine de P, avec le même ordre de multiplicité. Donc $-i = \bar{i}$ est racine double de P.

b. i et $-i$ étant racines doubles de P, on en déduit que P est divisible par

$$(X-i)^2(X+i)^2 = (X^2+1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1.$$

En posant la division euclidienne de P par $X^4 + 2X^2 + 1$, on obtient :

$$P = (X^4 + 2X^2 + 1)(X - 5),$$

donc 5 est une racine simple de P. L'ensemble des racines de P est formé des racines doubles i et $-i$ et de la racine simple 5.

Exercice 6.
```
float* kro(loat* A,float* B, int n)
{
 float* C=malloc(n*n*sizeof(float));
 int i,j;
 for(i=0;i<n;i++)
  for(j=0;i<n;i++)
{
```

```
    C[i*n+j]=A[i*n+j]*B[i*n+j];
   }
 return C;
}
```