ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
CORRECTION DU PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2016-2017

Les nombres entre parenthèses indiquent la valeur de chaque question dans le barème final.

Exercice 1 (1,5 pts)**.** Les sous-espaces vectoriels $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ ou toute droite passant par l'origine convenaient.

Exercice 2 (3 pts)**.** Soient n, p, q, r des entiers naturels non nuls, A une matrice $n \times p$ et B une matrice $q \times r$.
a) (1) La somme $A + B$ est bien définie si les matrices A et B sont de même taille, donc si $n = q$ et $p = r$. La somme est alors une matrice $n \times p$. En notant $[c_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ cette somme, on a :

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},\ \forall j \in \{1, \dots, p\}.$$

b) (2) Le produit BA est bien défini quand le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A, c'est à dire quand $r = n$. C'est alors une matrice de taille $q \times p$. En notant $[d_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq q\\1\leq j\leq p}}$ ce produit, on a :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}, \quad \forall i \in \{1, \dots, q\},\ \forall j \in \{1, \dots, p\}.$$

Exercice 3 (5pts)**.**
a) (1,5) Lorsque $\lambda = 1$, le système s'écrit

$$(S_1) \qquad \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ \qquad\ \ -3z = -1. \end{cases}$$

On échelonne le système par des manipulations sur les lignes :

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ \qquad\quad 6z = 2 \qquad (L_2) - L_1 \\ \qquad\ \ -3z = -1 \qquad\qquad . \end{cases}$$

Date: Mardi 28 février 2017.

Ou encore :

$$\begin{cases} x+y=2 & (L_1)-(L_3) \\ 0=0 & (L_2)+2(L_3) \\ -3z=-1 & . \end{cases}$$

Le système est donc équivalent aux 2 équations : $x+y=2$ et $z=1/3$. Il est compatible et l'ensemble des solutions est :

$$\Big\{(2-y,y,1/3),\ y\in\mathbb{R}\Big\}.$$

b) (3) Le système général s'écrit :

$$\begin{cases} x+\lambda y-(\lambda+2)z=1 \\ x+(2\lambda-1)y+(\lambda+2)z=\lambda+2 \\ (1-\lambda)y-(\lambda+2)z=-\lambda. \end{cases}$$

On commence par simplifier le système par des manipulations sur les lignes :

$$\begin{cases} x+\lambda y-(\lambda+2)z=1 \\ (\lambda-1)y+2(\lambda+2)z=\lambda+1 & (L_2)-(L_1) \\ (1-\lambda)y-(\lambda+2)z=-\lambda. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\lambda y-(\lambda+2)z=1 \\ (\lambda-1)y+2(\lambda+2)z=\lambda+1 \\ (\lambda+2)z=1 & (L_3)+(L_2). \end{cases}$$

Le système (S_λ) est donc équivalent à :

$$(S'_\lambda) \qquad \begin{cases} x+\lambda y=2 & (L_2)+(L_3) \\ (\lambda-1)y=\lambda-1 & (L_2)-2(L_3) \\ (\lambda+2)z=1. \end{cases}$$

On distingue 3 cas, selon que les coefficients de y et z dans le système s'annulent ou non :

1er cas : $\lambda\neq 1$ et $\lambda\neq -2$. Le système est sous forme échelonnée. On peut diviser la 2ème ligne de (S'_λ) par $\lambda-1$ et sa 3ème ligne par $\lambda+2$. On obtient :

$$\begin{cases} x+\lambda y=2 \\ y=1 & \dfrac{1}{\lambda-1}(L_2) \\ z=1/(\lambda+2) & \dfrac{1}{\lambda+2}(L_3), \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x=2-\lambda & (L_1)-\lambda(L_2) \\ y=1 \\ z=1/(\lambda+2). \end{cases}$$

Le système a pour unique solution le triplet $\left(2-\lambda, 1, \frac{1}{\lambda+2}\right)$.
2ème cas : $\lambda = 1$. Le système a été résolu à la première question. L'ensemble des solutions est :

$$\Big\{(2-y, y, 1/3),\ y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

3ème cas : $\lambda = -2$. La troisième ligne de (S'_λ) est $0 = 1$. Le système est incompatible (il n'y a pas de solution).
c) (0,5) Le système (S_λ) est un système à 3 équations et 3 inconnues. C'est un système de Cramer si et seulement si il a une unique solution, c'est à dire quand $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$.

Exercice 4 (5 pts)**.** Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = [b_{i,j}] \in \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{R})$.
a) (2) Dans cette question :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En utilisant la définition du produit matriciel, on obtient :

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -11 & 31 & 0 \\ -5 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice AB est une matrice 2×2. Son déterminant vaut $3 \times 0 + (-1) \times 1 = -1$. Il est non nul. La matrice est inversible. La matrice BA a une ligne de 0. Elle n'est donc pas inversible.
b) (1) Le système

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = 0 \end{cases}$$

est homogène. Il est donc compatible (il a pour solution particulière $(0,0,0)$). Soit (S') la forme échelonnée réduite de (S). Alors (S') a $p' \leq 2$ lignes non nulles. L'ensemble des solutions se décrit avec $3 - p' \geq 1$ paramètre. Le système a donc une infinité de solution.
c) (0,5) Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Alors (x_1, x_2, x_3) est solution de (S) si et seulement si

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) (0,75) Par la question (b), il existe une solution $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ du système (S). Par la question (c), le vecteur colonne $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

est donc solution non nulle de $AX = 0_{2,1}$. En multipliant par B, on obtient $BAX = 0_{3,1}$.

e) (0,75) Il existe $X \in \mathrm{Mat}_{3,1}$, non nul, tel que $BAX = 0_{3,1}$. Par un critère d'inversibilité du cours, la matrice BA n'est pas inversible.

Exercice 5 (3,5 pts)**.** Soit $P = X^3 + (2i-2)X^2 - (4i+1)X + 2$.

a) (1,5) On pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & X^3 & + & (2i-2)X^2 & - & (4i+1)X & + & 2 & & X-2 \\ \hline
- & X^3 & + & 2X^2 & & & & & & X^2+2iX-1 \\ \cline{1-9}
 & & & 2iX^2 & - & (4i+1)X & + & 2 & & \\
 & & - & 2iX^2 & + & 4iX & & & & \\ \cline{1-9}
 & & & & - & X & + & 2 & &
\end{array}$$

Le quotient est $X^2 + 2iX + 1$. Le reste est 0.

b) (2) D'après la question précédente, $P = (X^2 + 2iX + 1)(X - 2)$. Il reste à résoudre l'équation $x^2 + 2ix - 1 = 0$. Son discriminant vaut $-4 + 4 = 0$. Elle a pour racine double $-i$. On a donc

$$P = (X + i)^2(X - 2).$$

Le polynôme P a pour racine simple 2 et pour racine double $-i$.

Exercice 6 (3 pts)**.**

```
float* sylvester(float* P, int p, float* Q, int q) {
 int i,j;
 float* M = malloc((p+q)^2,sizeof(float));
 for (i=0; i<q; i++)
  for (j=0; j<=p; j++)
   M[i*(p+q)+i+j]=P[p-j];
 for (i=0; i<=q; i++)
  for (j=0; j<p; j++)
   M[(j+q)*(p+q)+i+j]=Q[q-i];
 return M;
}
```