ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2016-2017

Durée : 2 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (1,5 pts)**.** Soit $E = \mathbb{R}^2$. Donner trois exemples différents de sous-espaces vectoriels de E.

Exercice 2 (3 pts)**.** Soient n, p, q, r des entiers naturels non nuls, A une matrice $n \times p$ et B une matrice $q \times r$.
a) A quelle condition sur n, p, q, r la somme $A+B$ est-elle définie ? Quelle est alors la dimension (nombres de lignes et colonnes) de cette somme ? Exprimer les coefficients $c_{i,j}$ de la matrice $A+B$ en fonctions des coefficients $a_{i,j}$ de A et des coefficients $b_{i,j}$ de B.
b) A quelle condition sur n, p, q, r le produit BA est-il défini ? Quelle est alors la dimension (nombres de lignes et colonnes) de ce produit ? Exprimer les coefficients $d_{i,j}$ de la matrice BA en fonctions des coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

Exercice 3 (4,5 pts)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant, dépendant du paramètre λ, d'inconnues réelles x, y et z :

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} x + \lambda y - (\lambda+2)z = 1 \\ x + (2\lambda - 1)y + (\lambda+2)z = \lambda + 2 \\ (1-\lambda)y - (\lambda+2)z = -\lambda. \end{cases}$$

a) Résoudre ce système quand $\lambda = 1$.
b) Résoudre le système (S_λ) selon la valeur du paramètre λ.
c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur λ le système (S_λ) est-il un système de Cramer ?

Exercice 4 (5 pts)**.** Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = [b_{i,j}] \in \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{R})$.
a) On suppose dans cette question **(et seulement dans cette question)** :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Calculer AB et BA. La matrice AB est-elle inversible ? Et la matrice BA ?

Date: Mardi 28 février 2017.

b) On considère le système suivant, d'inconnues $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système est-il compatible ? A-t-il une infinité de solutions ? Justifier vos réponses.

c) Ecrire (S) sous forme matricielle.

d) Montrer, en utilisant les question précédentes, qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, **non nul**, tel que $AX = 0_{2,1}$, où $0_{2,1}$ est la matrice nulle 2×1. Que vaut BAX ?

e) Montrer que BA n'est pas inversible.

Exercice 5 (3 pts)**.** Soit $P = X^3 + (2i-2)X^2 - (4i+1)X + 2$.

a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X - 2$.

b) Donner toutes les racines complexes de P avec leurs ordres de multiplicité.

Exercice 6 (Exercice d'algorithmique, 3 pts)**.** La *matrice de Sylvester* de deux polynômes P et Q de degrés respectifs p et q est la matrice $(p+q)\times(p+q)$ définie comme suit :

- les $p+1$ premiers coefficients de la première ligne sont ceux de P (par ordre de degré croissant) et les coefficients suivants sont tous nuls ;
- la i-ème ligne, $2 \leq i \leq q$, est obtenue à partir de la $(i-1)$-ème en la décalant d'une colonne vers la droite, le premier coefficient étant nul ;
- les lignes $1+q$ à $p+q$ sont obtenues de la même façon que les lignes 1 à q mais à partir du polynôme Q.

Par exemple, avec $P = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3$ et $Q = \sqrt{5} + \sqrt{6}X + \sqrt{7}X^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Écrire le code C d'une fonction `sylvester` qui renvoie la matrice de Sylvester M de deux polynômes P et Q passés en paramètres. Ces polynômes seront des tableaux unidimensionels dynamiquement alloués, la i-ème case contenant le coefficient de X^i. La matrice M sera également dynamiquement allouée.