ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2016-2017

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Il est possible de traiter une question en admettant les résultat des questions précédentes.

L'exercice d'algorithmique doit être traité sur une feuille à part.

Exercice 1 (Questions de cours I)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E.

a. Donner la définition de "$\mathcal{F}$ est liée" et de "$\mathcal{F}$ est libre".

b. Donner la définition de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.

c. Montrer le lemme suivant :

Lemme. *On suppose que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Soit $\vec{u} \in E$. Alors $\mathcal{F} \cup (\vec{u})$ est liée si et seulement si $\vec{u} \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$.*

On montrera successivement les deux implications.

Exercice 2 (Questions de cours II)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

a. Donner la définition de $\operatorname{Ker} f$, le noyau de f.

b. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3. Soit
$$G = \Big\{(a + 2b, a + b, 3a + 5b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\Big\}.$$

a. Justifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera (en justifiant) une base et la dimension.

b. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ le système

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} a + 2b = x \\ a + b = y \\ 3a + 5b = z, \end{cases}$$

d'inconnues réelles a, b et c, est-il compatible ? En déduire une description cartésienne de G.

Date: Jeudi 4 mai 2017.

c. Soit H l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ du système suivant :

$$\text{(T)} \qquad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + 5y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

Justifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base et la dimension de H.

d. Donner une relation entre les dimensions de G, H, $G + H$ et $G \cap H$.

e. Déterminer $G \cap H$.

f. Calculer la dimension de $G + H$. Déterminer $G + H$. Les espaces G et H sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. Soit

$$\vec{v}_1 = (-1, 2, 0), \quad \vec{v}_2 = (-2, 5, 1), \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 2)$$

et $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

a. (i) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit $\vec{e} = (1, -1, 3)$. Donner les coordonnées de $\vec{e}$ dans la base $\mathcal{B}$.

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f\big((x, y, z)\big) = (-3x - 2y + z, 6x + 4y - z, -4x - 2y + 3z).$$

(i) Donner la matrice A de f dans la base canonique.

(ii) Soit g un autre endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est inclus dans $\operatorname{Ker}(g \circ f)$.

(iii) On suppose que g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -14 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique.

(iv) En déduire $\operatorname{Ker}(g \circ f)$, puis $\operatorname{Ker} f$. La fonction f est-elle injective ? Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

c. (i) Déterminer $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$ et $f(\vec{v}_3)$, puis $C = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$.

(ii) Exprimer en fonction de C la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^8)$ de $f^8 = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{8 \text{ fois}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

d. (i) Soit P et Q deux matrices carrées de même taille, et $n \geq 1$ un entier. Donner une condition suffisante sur P et Q pour que la formule du binôme pour $(P + Q)^n$ soit valable. Rappeler cette formule.

(ii) On pose

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer PQ, QP, puis, pour $n \geq 2$, P^n, Q^n, et M^n.

(iii) En utilisant la question **c**, déterminer la matrice de f^8 dans la base $\mathcal{B}$.

(iv) En utilisant la question **a**, déterminer les coordonnées de $f^8(\vec{e})$ dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base canonique.

Exercice 5 (Algorithmique, à traiter sur une feuille à part)**.** On considère la fonction suivante (% est l'opération modulo) :

```
float blup(float a, int n)
{
 if (n==1) return a;
 else
 {
  float b=blup(a,n/2);
  if (n%2==0) return b*b;
  else return b*b*a;
 }
}
```

(i) Que calcule-t-elle et avec quelle stratégie ?

(ii) Calculer sa complexité asymptotique, mesurée par le nombre de multiplication faites.

(iii) Trouvez une façon de calculer a^{15} avec seulement cinq multiplications.