ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
CORRECTION DU PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2016-2017

1. Quelques remarques sur la correction du Partiel 2

Il est conseillé aux étudiants préparant l'examen de rattrapage d'algèbre linéaire de lire très attentivement ces remarques.

Comme il était rappelé en préambule du partiel, il faut justifier rigoureusement les réponses aux questions. Par exemple, les nombreux étudiants qui ont donné, en question 4,d ii), la valeur juste de M^n sans aucune justification n'ont reçu que $0,5$ points sur $1,5$ pour cette question.

Il faut faire des phrases pour répondre aux questions. Il faut également éviter de répondre à des questions qui ne sont pas posées. Les phrases fausses sont sanctionnées, même lorsqu'une réponse juste est également donnée.

Certains étudiants confondent beaucoup trop souvent des objets de natures différentes. Quelques exemples de phrases impropres : si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteur "la dimension de $\mathcal{F}$ est..." ne veut rien dire ; si G est un espace vectoriel les phrases "G est libre" voire "G est génératrice" ou "G est une famille de 3 vecteurs" ou "Ker G=2" ou "Card G=2" ne peuvent que plonger le correcteur dans des abîmes de perplexité !

Si G et H sont deux espaces vectoriels : "$G \cap H = 2$" n'a aucun sens ! Si f est un application linéaire, "$Kerf \subset f$" non plus ! Quelques autres exemples d'affirmations étranges tirés des copies :

"vect$((1,1,3),(2,1,5))$ est libre." "$\dim(H+G) = \mathbb{R}^3$.", "La dimensions de G est $\mathbb{R}^2$." "vect$((1,1,3),(2,1,5)) = (x,y,z)$." "Ker $f = \{x \in E$ t.q. $f(x) = 0_F\}$"

On ne parle pas de la dimension d'une famille de vecteurs, mais de son cardinal ou de son rang.

La plupart des étudiants ne savent pas nier une implication : la négation de "A implique B" est : "A et non(B)" (cf Exercice 1 a).

La définition de l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs est très peu connue, et souvent confondue avec celle d'une famille génératrice (cf Exercice 1b).

Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel il faut essayer d'éviter, quand c'est possible, de revenir à la définition. Pour l'exercice 3a, on pouvait utiliser que G est l'espace vectoriel engendré par deux vecteurs, ou l'image d'une certaine application linéaire.

Il est fortement conseillé aux étudiants de vérifier leurs réponses à des questions calculatoires. Cette vérification est souvent aisée. Par exemple dans l'exercice 3b, on pouvait vérifier que les vecteurs qui engendre G satisfaisaient l'equation trouvée. Par ailleurs il faut se poser des questions et revenir en arrière quand on trouve des résultats incohérents. Certains étudiants ont trouvé un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 4, ou de

Date: Jeudi 4 mai 2017.

dimension -1, ou deux plans de $\mathbb{R}^3$ dont l'intersection est réduite au vecteur nul, sans être génés. D'autres ont donné une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

On rappelle que le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 est $\mathbb{R}^3$ (cf exercice 3f).

Il est conseillé aux étudiants de lire attentivement les questions. Il leur arrive de répondre à des questions beaucoup plus compliquées que ce qui est demandé. Par exemple dans l'exercice 4 question c ii), la réponse C^8 convenait parfaitement (on ne demandait pas de calculer cette matrice).

La formule du binôme est trop peu connue. Lorsqu'il s'agit de matrices, il ne faut pas oublier de supposer que les deux matrices commutent.

Pour montrer qu'une famille explicite de $\mathbb{R}^n$ est une base (Exercice 4, question a.i) : on peut utiliser le déterminant. On peut aussi montrer que c'est une famille libre et qu'elle a le bon nombre d'éléments (n). Il est important de ne pas oublier ce dernier point.

Exercice 1 (Questions de cours I)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E.

a. On dit que $\mathcal{F}$ est liée quand il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est libre quand elle n'est pas liée, c'est à dire

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

b. L'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ est l'ensemble

$$\operatorname{Vect} \mathcal{F} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

c. Montrons :

Lemme. *On suppose que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Soit $\vec{u} \in E$. Alors $\mathcal{F} \cup (\vec{u})$ est liée si et seulement si $\vec{u} \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$.*

(Ce lemme est appelé “lemme utile sur les familles libres” dans le cours, cf lemme V.3.12 du polycopié).

Preuve de l'implication $\Rightarrow$. Supposons que $\mathcal{F} \cup (\vec{u})$ est liée. Cela signifie qu'il existe des scalaires $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j + \lambda_{n+1} \vec{u} = \vec{0}_E.$$

Si λ_{n+1} était nul, on aurait $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E$, ce qui impliquerait, la famille $\mathcal{F}$ étant libre, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Comme $\lambda_{n+1} = 0$, on a obtenu une contradiction avec le fait que les λ_j sont non tous nuls.

On en déduit donc que λ_{n+1} est non nul. En divisant par λ_{n+1} on obtient :

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} -\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}} \vec{u}_j,$$

ce qui montre que $\vec{u}$ est un élément de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$.

Preuve de l'implication $\Leftarrow$. On suppose que $\vec{u} \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$. Par définition de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\vec{u} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{u}_j$. On peut réécrire cette égalité

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{u}_j - \vec{u} = \vec{0}_E.$$

Le coefficient de $\vec{u}$ dans cette combinaison linéaire est -1. Il est non nul, ce qui montre que la famille $\mathcal{F} \cup (\vec{u})$ est liée.

Exercice 2 (Questions de cours II)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

a. Par définition, le noyau de f est l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \vec{x} \in E \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0}_F \right\}.$$

b. L'application f étant linéaire, on a $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$. Donc $\vec{0}_E \in \operatorname{Ker} f$.

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\operatorname{Ker} f)^2$. Alors, par linéarité de f,

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \vec{0}_F + \vec{0}_F = \vec{0}_F.$$

Donc $\vec{x} + \vec{y} \in \operatorname{Ker} f$.

Soit maintenant $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda \vec{0}_F = \vec{0}_F,$$

ce qui montre que $\lambda \vec{x}$ est un élément de $\operatorname{Ker} f$.

On a bien montré que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3. Soit

$$G = \left\{ (a + 2b, a + b, 3a + 5b), \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

a. On peut réécrire la définition de G :

$$G = \left\{ a(1, 1, 3) + b(2, 1, 5) \ : \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\Big((1, 1, 3), (2, 1, 5) \Big).$$

Par le cours, G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Par l'écriture précédente, la famille $\mathcal{C} = \Big((1, 1, 3), (2, 1, 5) \Big)$ est une famille génératrice de G. C'est de plus une famille de 2 vecteurs qui ne sont pas colinéaires, et donc une famille libre. Ainsi, $\mathcal{C}$ est une base de G, et G est de dimension 2.

b. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. échelonnons le système :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} a + 2b = x \\ a + b = y \\ 3a + 5b = z, \end{cases}$$

d'inconnues réelles a et b. Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) - 3(L_1)$, puis $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_2)$, on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} a + 2b = x \\ -b = y - x \\ -b = z - 3x, \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b = x \\ -b = y - x \\ 0 = -2x - y + z. \end{cases}$$

C'est un système échelonné, qui est compatible si et seulement si $0 = -2x - y + z$.

En revenant à la définition de G, on remarque que (S) est compatible si et seulement si $(x, y, z) \in G$. On en déduit la description cartésienne de G :

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y - z = 0\right\}.$$

c. Soit H l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ du système suivant :

$$\text{(T)} \qquad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + 5y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

C'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à 3 inconnues réelles, donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour trouver une base de H, on résout le système (T) par la méthode du pivot de Gauss.

$$(x, y, z) \in H \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + 5y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \quad (L_2) - 4(L_1) \\ y + 3z = 0 \quad (L_3) - 2(L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 4z = 0 \quad (L_1) - (L_2) \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

On a obtenu un système échelonné. En choisissant x et y comme variable de base et z comme variable libre, on obtient :

$$H = \{(4z, -3z, z), \ z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\Big((4, -3, 1)\Big).$$

L'espace vectoriel H est donc de dimension 1, et a pour base $\Big((4, -3, 1)\Big)$.

d. D'après le cours :

$$\dim(G + H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H).$$

e. Soit $\vec{x} \in G \cap H$. Puisque $\vec{x} \in H$, la question **c** implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = \lambda(4, -3, 1) = (4\lambda, -3\lambda, \lambda)$. De plus, $\vec{x} \in G$. En utilisant la description cartésienne de G trouvée à la question **b**, on obtient : $8\lambda - 3\lambda - \lambda = 0$, ce qui implique $\lambda = 0$. Donc $\vec{x} = (0, 0, 0)$. D'où :

$$G \cap H = \{(0, 0, 0)\}.$$

f. Par les questions précédentes,

$$\dim(G + H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H) = 2 + 1 - 0 = 3.$$

$G + H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. C'est donc exactement $\mathbb{R}^3$. On a :

$$G + H = \mathbb{R}^3, \quad G \cap H = \{\vec{0}\},$$

ce qui montre que G et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit $\vec{v}_1 = (-1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (-2, 5, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 2)$ et $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

a. (i) La famille $\mathcal{B}$ est une famille de trois vecteurs $\mathbb{R}^3$. D'après le chapitre du cours sur les déterminants, c'est une base si et seulement si le déterminant dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ est non nul. Ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

On a obtenu la première égalité par l'opération $(L_2) \leftarrow (L_2) + 2(L_1)$. La deuxième égalité a été obtenue en développant par rapport à la première colonne. Enfin, la troisième découle immédiatement de la formule explicite d'un déterminant 2×2.

(ii) Soit $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$ les coordonnées de $\vec{e}$ dans la base $\mathcal{B}$. Par définition :

$$(1, -1, 3) = e_1\vec{v}_1 + e_2\vec{v}_2 + e_3\vec{v}_3.$$

Soit :

$$\begin{cases} -e_1 - 2e_2 = 1 \\ 2e_1 + 5e_2 + e_3 = -1 \\ e_2 + 2e_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -e_1 - 2e_2 = 1 \\ e_2 + e_3 = 1 & (L_2) + 2(L_1) \\ e_2 + 2e_3 = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -e_1 - 2e_2 = 1 \\ e_2 + e_3 = 1 \\ e_3 = 2 & (L_3) - (L_2) \end{cases}$$

Par substitution on obtient $e_2 = -1$ et $e_1 = 1$. Finalement, les coordonnées de $\vec{e}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f\big((x, y, z)\big) = (-3x - 2y + z, 6x + 4y - z, -4x - 2y + 3z).$$

(i) On lit les coefficients de la matrice A sur la formule définissant f :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(ii) Soit g un autre endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$. Alors Par définition de $g \circ f$, on a :

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g\big((0, 0, 0)\big) = (0, 0, 0).$$

Donc $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. On a montré $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

(iii) On suppose que g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -14 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice de $g \circ f$ dans la base canonique est BA, que l'on calcule en utilisant la formule du produit de 2 matrices. On obtient :

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(iv) La question précédente montre que $g \circ f = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, où $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est l'identité de $\mathbb{R}^3$. En particulier $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \{(0, 0, 0)\}$. Puisque par (ii), $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et que $(0, 0, 0) \in \operatorname{Ker} f$, on a $\operatorname{Ker} f = \big\{(0, 0, 0)\big\}$.

On en déduit que f est injective. Pour des raisons de dimension (par le théorème du rang), un endomorphisme injectif est un automorphisme. f est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On pouvait aussi observer que par (iii), f est inversible, d'inverse $\frac{1}{2}g$, donc bijectif, ce qui montre que c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

c. (i) En utilisant la définition de f, on obtient

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &= (-1,2,0) = \vec{v}_1 \\ f(\vec{v}_2) &= (-3,7,1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ f(\vec{v}_3) &= (0,2,4) = 2\vec{v}_3. \end{aligned}$$

On en déduit

$$C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(ii) On rappelle que la matrice de la composée de deux endomorphismes est le produit des matrices de ces deux endomorphismes. On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^8)$ est exactement C^8.

d. (i) Soit P et Q deux matrices carrées de même taille, et $n \geq 1$ un entier. Si P et Q commutent (i.e. si $PQ = QP$), on a la formule du binôme :

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}.$$

(ii) On pose

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En utilisant la formule du produit matriciel, on obtient :

$$PQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad QP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice P est diagonale. Le produit de deux matrices diagonales est obtenu en multipliant terme à terme les coefficients. On en déduit immédiatement :

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Par un calcul direct : $Q^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. D'où :

$$\forall n \geq 2, \quad Q^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices P et Q commutent. Par la formule du binôme, rappelée à la question précédente :

$$\begin{aligned} M^n = (P+Q)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} = P^n + nP^{n-1}Q \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) On remarque que $C = M$. Par la question **c**, la matrice de $f^8(\vec{e})$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$C^8 = M^8 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 256 \end{bmatrix}.$$

(iv) D'après la question **a** et (iii), les coordonnées de $f^8(\vec{e})$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 512 \end{bmatrix}.$$

On en déduit :

$$f^8(\vec{e}) = -7(-1,2,0) - (-2,5,1) + 512(0,1,2) = (9,493,1023).$$

Exercice 5. (i) `blup(a,n)` calcule a^n avec la stratégie diviser pour régner.

(ii) Soit $c(n)$ le nombre de multiplications effectuées par `blup(a,n)`. On a

$$c(2^p) = c(2^{p-1}) + 1 = c(2^{p-2}) + 2 = \ldots = c(2^0) + p = O(p).$$

Avec $n = 2^p$ on a $p = \log_2(n)$ donc $c(n) = O(\log_2(n))$. La complexité asympotique est donc logarithmique.

(iii) On utilise des variables intermédiaires pour ne pas refaire plusieurs fois le même calcul :

```
a2=a*a
a4=a2*a2
a5=a4*a
a10=a5*a5
a15=a10*a5
```

La variable `a15` contient a^15 et son calcul a nécessité 5 multiplications (une par ligne).