TD 1: systèmes linéaires

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2016-2017, 2ème semestre

Nombres complexes : révisions

Exercice 1. Ecrire $\sqrt{3}i+3$ sous forme trigonométrique. Ecrire $2e^{i\pi/3}$ et $4e^{-i\pi/2}$ sous forme cartésienne.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{a)} \quad z^2 + 2z + 5 = 0, \qquad \text{b)} \quad z^2 + (3-2i)z + 1 - 3i = 0, \qquad c) \quad z^3 = 3 + 3i.$$

Systèmes linéaires

Exercice 3.
a) Donner 2 solutions (x, y, z) de l'équation $3x - 4y + z = 2$. Décrire sous forme paramétrique l'ensemble des solutions (réelles) de cette équation.
b) Décrire sous forme paramétrique l'ensemble des solutions (réelles) du système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 3. \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre les 2 systèmes suivants, d'inconnues complexes x et y :

$$\begin{cases} (1+i)x - 2iy = 2 \\ \quad x - (i+1)y = 1 - i \end{cases} \qquad \begin{cases} \;(2-i)x + iy = i \\ (2i+2)x - y = -1 \end{cases}$$

Exercice 5. Aldric vit dans un studio de 20 m^2 constitué d'une chambre, d'une salle de bain et d'une cuisine. Il fait des travaux chez lui, augmentant la surface de la salle de bain de 40% et celle de la cuisine de 20%, et diminuant celle de la chambre de 20%. Après les travaux, la chambre fait la moitié de la surface de l'appartement. Donner les surfaces de chaque pièce avant et après les travaux.

Exercice 6. Dans le Plan P muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considére les deux droites D_1 et D_2 d'équation respective : $x + y = 2$ et $3x - y = -2$. Déterminer les coordonnées du point A, intersection des droites D_1 et D_2. Donner la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite de P passant par A. Retrouver cette forme pour les équations de D_1 et D_2.

Exercice 7.
a) Les matrices suivantes sont-elles sous forme échelonnée ? Sous forme échelonnée réduite ?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} i+1 & 2i & 2 & -2 \\ 0 & 2i & 1 & 4+2i \end{array}\right]$$

b) En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, mettre chacune des matrices précédentes sous forme échelonnée réduite.
c) Écrire les systèmes correspondant aux matrices de la question a). Déterminer les solutions de ces systèmes à l'aide de la question b).

Exercice 8.
a) Résoudre les systèmes suivants sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 4x_1 + 4x_2 + 20x_3 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + 22x_3 = -2 \\ 2x_1 - 6x_2 - 20x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ -2x_2 - 2x_3 + x_4 = -9 \end{cases}$$

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes de matrices augmentées :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -12 & -36 & -16 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 24 & 10 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & -1 & -3 & 8 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système linéaire suivant, d'inconnues x_1, x_2 et x_3 : Pour tout j variant de 1 à 3, $\sum_{k=1}^{3}(j+k)x_k = j$.

Exercice 10. Résoudre les systèmes suivants sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} 2x - 4y + (4-4i)z = 6 + 2i \\ -ix + iy - (1+2i)z = 1 - 2i. \end{cases}, \quad \begin{cases} -2ix + 3iy + (1-2i)z = 1 \\ x + (i-2)y + (2-i)z = 0 \\ -ix + iy + (1-i)z = i \end{cases}$$

Exercice 11. Pour chacune des matrices augmentées suivantes dire **sans aucun calcul** si le système correspondant a une solution, aucune solution ou une infinité de solutions :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -7 & 9 & 0 \end{array}\right].$$

Exercice 12.
a) Résoudre le système (réel) de matrice augmentée $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -8 & 0 \end{array}\right]$. Est-ce un système de Cramer ?
b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Combien de solutions a le système de matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & -7 & a \\ -1 & 2 & -1 & b \\ 3 & -3 & -8 & c \end{array}\right]?$$

Résoudre ce système.

Exercice 13. A quelles conditions sur les réels a, b et c le système suivant est-il compatible ?

$$x + 2z = a, \quad -2x - y - 7z = b \quad \text{et} \quad -x - 3y - 11z = c.$$

Exercice 14. Résoudre, selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants, d'inconnues réelles (x, y, z) :

$$\begin{cases} 2x + 4y + (2+2a)z = 8 - 6a \\ 4x + 2y + (1+4a)z = 13 - 9a \\ -2x + 14y + (7-2a)z = 2 - 4a \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + (3+a)z = 2a \\ -2x - 4y + (4a-2)z = 8 + 2a \\ 2x + 3y + 5z = -3 + 2a. \end{cases}$$

Exercice 15. Résoudre, selon la valeur du paramètre a, le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - (a+1)y + 3z = -1 \\ -2x + (a+1)y - z = 1 \\ x - (a+1)y + (a+1)z = a + 1. \end{cases}$$

A quelle condition sur a est-ce un système de Cramer ?

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 16. (Cours). Donner la définition d'un système de Cramer. Donner un exemple de système de Cramer à deux équations, deux inconnues.

Exercice 17. Résoudre n'importe quel "petit" système linéaire réel ou complexe.

Exercice 18. Résoudre, selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$, le système linéaire, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} ax - 2y = 4 \\ x + (a-3)y = a. \end{cases}$$

Exercice 19. A quelles conditions sur les réels a, b et c le système suivant est-il compatible ?

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + 2y + 5z = b \\ x + y + 3z = c. \end{cases}$$

Exercice 20. Résoudre, selon les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$, le système suivant, d'inconnues complexes (x, y, z) :

$$\lambda x = 1, \quad \lambda y = 0, \quad z = \lambda^3 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0.$$