# TD 5: espaces vectoriels II

Institut Galilée. L1, algèbre linéaire
Année 2016-2017, 2ème semestre

**Exercice 1.**
**a)** Soit $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ d'équation cartésienne $2x + iy - z = 0$. Donner la dimension et une base de $E$.
**b)** Soit $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations cartésiennes $x_1 + x_3 - x_4 = 0$ et $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Donner la dimension et une base de $E$.

**Exercice 2.** On considère les sous-espaces vectoriels $E$, $F$, $G$ et $H$ de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 = 2x_3\right\}, \quad F = \text{vect}\big((0,1,0),(2,1,-1)\big),$$
$$G = \text{vect}\big((4,3,-2)\big), \quad H = \text{vect}\big((1,1,2)\big).$$

Déterminer une base et la dimension de

$$F \cap G, \quad G \cap H, \quad E \cap H, \quad E \cap F$$

puis une base et la dimension de

$$F + G, \quad G + H, \quad E + H, \quad E + F.$$

Déterminer si les espaces $F$ et $G$ (respectivement $G$ et $H$ ; $F$ et $H$ ; $E$ et $F$) sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 3.** Soit

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}, \quad F = \text{vect}\{(1,2,3,2)\}$$
$$G = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_4 = 0\right\}.$$

Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, puis que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice 4.** Soit $\vec{u} = (1,-1,-1)$, $\vec{v} = (-2,4,1)$ et $F$ le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
**a)** Quelle est la dimension de $F$ ?
**b)** Fixons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition sur $(x, y, z)$ le système

$$a\vec{u} + b\vec{v} = (x, y, z),$$

d'inconnues réelles $a$ et $b$ est-il compatible ? En déduire une description cartésienne de $F$.

**c)** Déterminer par un raisonnement analogue une description cartésienne du sous-espace de $\mathbb{C}^4$ $\text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u} = (i, 1, -1, 0)$ $\vec{v} = (1, -i, 2i, 1)$.

**Exercice 5.**

**a)** Résoudre, selon le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \lambda^2 x + y + z = 0 \\ 2x + (\lambda + 3)y + 2z = 0. \end{cases}$$

**b)** Soit $E_\lambda$ l'espace vectoriel des solutions de $(S_\lambda)$. Déterminer, en distinguant selon les valeurs de $\lambda$, une base et la dimension de $E_\lambda$.

**Exercice 6.** Donner le rang des familles de vecteurs suivantes. En extraire une famille libre.

$$\mathcal{F}_1 = \Big((2,1), (-2,-4), (1,2), (2,-7), (3,-4)\Big), \qquad \mathcal{F}_2 = \Big((1,2,-2), (2,13,11), (0,3,5)\Big),$$
$$\mathcal{F}_3 = \Big((1,0,0,1), (2,-1,2,3), (-2,-1,1,3), (4,1,2,-1)\Big).$$

**Exercice 7.** Montrer que les familles suivantes sont libres. Les compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ (respectivement de $\mathbb{R}^4$) :

$$\mathcal{F} = \{(-1,3,4), (1,2,-3)\}, \quad \mathcal{G} = \{(3,1,2,-1), (1,0,-1,2)\}.$$

**Exercice 8.** Soit $\vec{u}_1 = (-1,2,0)$, $\vec{u}_2 = (1,3,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,-2)$.

**a)** Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**b)** Exprimer les coordonnées d'un point $(x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Exercice 9.** Soit $n \geq 2$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^n$ :

$$F = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \ : \ \sum_{k=1}^{n} k\, x_k = 0 \right\} \text{ et } G = \text{vect}\big((1,1,\ldots,1)\big).$$

Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

**Exercices à préparer pour le contrôle continu.**

**Exercice 10** (Question de cours). Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel $E$. Soit $\vec{v} \in E$. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\vec{v} \notin \text{vect}\,\mathcal{F}$.

**Exercice 11.** Soit $\lambda$ un paramètre réel. On considère les deux sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$ :

$$F = \text{vect}\big((1,0,\lambda)\big), \quad G = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y - z = 0\Big\}.$$

Déterminer selon la valeur du paramètre $\lambda$ une base et la dimensions de $F \cap G$ puis une base et la dimension de $F + G$. A quelle condition sur $\lambda$ ces deux espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 12.** On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ :

$$\vec{u}_1 = (2,-1,1,1), \quad \vec{u}_2 = (3,-1,2,1), \quad \vec{u}_3 = (1,0,1,0).$$

En utilisant la méthode de l'exercice 4, donner une description cartésienne du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ : $F = \text{vect}\big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\big)$.