L1, algèbre linéaire
2016/2017 Université
Mathématiques Paris 13

TD 6 : Applications linéaires

On pourra aussi consulter les feuilles d'exercices des années précédentes sur le site :
`http://www.math.univ-paris13.fr/~duyckaer/enseignement.html`

Exercice 1. Les applications suivantes de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ sont-elles linéaires ? Si oui, déterminer leur matrice de représentation dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$.
a) $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ n = p = 2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x, y)\big) = (3x - y, 2x + 3y)$.
b) $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ n = p = 2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x, y)\big) = (2xy, 3yx)$.
c) $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ n = p = 2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big((x, y)\big) = (1 + x + y, 2 - 2x - 2y)$.
d) $\mathbb{K} = \mathbb{C},\ n = 3,\ p = 2, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3,\ f\big((x, y, z)\big) = (4ix + (1 + i)y - (3 + i)z, ix + 2iy + z)$.
e) $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ n = 1,\ p = 4,\ f(x) = (3x, 2x, 0, -x)$.

Exercice 2. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.
a) Soit $\vec{u}_1 = (1, 1, -2)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$. Justifier que E est un espace vectoriel et montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de E.
b) Soit $(x, y, z) \in E$. Exprimer les coordonnées de (x, y, z) dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ en fonction de x et y.
c) Pour $(x, y, z) \in E$, on pose

$$f\big((x, y, z)\big) = (x + 2y, 2x + z, -3x - 2y - z)\,.$$

Montrer que f est un endomorphisme de E, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 3. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définies par : $f\big((x, y, z)\big) = (x-y, -x+2z)$ et $g\big((x, y)\big) = (x - y, 2x + y, -x)$.
a) Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques.
b) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ en utilisant le calcul matriciel.
c) Mêmes questions avec les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

$$f\big((x, y)\big) = (x - y, x + y), \quad g\big((x, y)\big) = (x + 2y, 2x + y).$$

Exercice 4. Soit $\vec{u}_1 = (-3, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (-6, 6, 1)$, et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
a) Monter que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$f\big((x, y, z)\big) = \big((9 + 4i)x + (9 + 3i)y + (6 + 6i)z, -(8 + 4i)x - (8 + 3i)y - (6 + 6i)z, -2x - 2y - z\big).$$

Déterminer la matrice A de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$
c) Calculer A^6. Soit $\vec{v} = (0, 0, -i)$. Donner les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f^6(\vec{v})$.

Exercice 5.
a) Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Rappeler une relation entre les dimensions de l'image et du noyau de f et la dimension de E.
b) Donner pour les applications linéaires suivantes une base de l'image et une base du noyau. Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? Déterminer si l'image et le noyau de f (respectivement g) sont supplémentaires.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\big((x, y)\big) = (x + 2y, 2x - y)$.
- $g : \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $g\big((x, y)\big) = (x + 2y, x - y, x + y)$.

c) Existe-t-il une application linéaire :

- de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est de dimension 2 ?

- de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est de dimension 2 et l'image de dimension 1 ?
- de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est de dimension 3 et l'image de dimension 2 ?
- de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est de dimension 2 ?

Si oui, donner un exemple d'une telle application.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, F un espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ une base de F. Soit f l'unique application linéaire de E dans F telle que

$$f(\vec{u}_1) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad f(\vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

a) Justifier l'existence de f à l'aide d'un théorème du cours. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

b) Donner une base de l'image et une base du noyau de f.

Exercice 7. Pour toutes les applications de l'exercice **1** qui sont des applications linéaires, déterminer une base de leur image et une base de leur noyau, et leur rang. Ces applications sont-elles injectives ? Surjectives ?

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E. Tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit donc de manière unique $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, avec $\vec{v} \in F$ et $\vec{w} \in G$. La *projection* p sur F parallèlement à G est par définition l'application $\vec{u} \mapsto \vec{v}$.

a) Vérifier que p est une application linéaire. Calculer $p^2 = p \circ p$. Donner le noyau et l'image de p.

b) On note n la dimension de E et q celle de F. Quelle est la dimension de G ? Soit $\mathcal{C}$ une base de F, $\mathcal{D}$ une base de G. Vérifier que $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ est une base de E. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p)$.

c) Soit f une application linéaire de E dans E telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires et que f est la projection sur $\mathrm{Im}\, f$, parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$.

d) On suppose $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(x,y,0),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, $H = \{(x,y,z)\ :\ x+y+z = 0\}$. Montrer que F et G (respectivement F et H) sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Soit p_1 la projection sur F parallèlement à G, p_2 la projection sur G parallèlement à F et p_3 la projection sur H parallèlement à F. Exprimer, pour $i = 1,2,3$, $p_i(x,y,z)$ en fonctions de x, y et z.

Exercice 9. Soit E et F des espaces vectoriels. On suppose E de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille libre.

Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice 10. Soit l'espace vectoriel $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x = y\}$.

a) Soit $\vec{u}_1 = (3,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,0,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,0)$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que $\mathcal{C} = (\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E.

b) Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans E tel que $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_3$ et $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$. Donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

c) Soit $\mathcal{D} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ dans la base $\mathcal{B}$. Donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(f)$.

Exercice 11 (Questions de cours)**.** Soit E, F des $\mathbb{K}$-espace vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

a) Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que f est une injection si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}_E\}$.

b) Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Montrer que f est surjective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de E.

c) Démonstration du théorème du rang.