L1, algèbre linéaire
2015/2016 Université
Mathématiques Paris 13

TD 7: déterminant, réduction des endomorphismes

Calcul de déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} i & 1 & -i \\ -i & 0 & 1 \\ -1 & 1 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 117 & 1 \\ 2 & 116 & 1 \\ 3 & 115 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants en développant par rapport à une ligne ou une colonne:

$$\begin{vmatrix} -3 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 8 & -2 \\ -2 & 7 & 12 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants par des manipulations sur les lignes ou les colonnes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & c & d \\ a & b & a & c \\ a & a & a & c \end{vmatrix},$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

Exercice 4. Soit $\vec{x} = (1, 2, a)$, $\vec{y} = (0, 2, 3)$ et $\vec{z} = (-1, 2, 1)$. Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles:

$$A_m = \begin{bmatrix} m & 2 & m+1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+1 & 2m+2 \end{bmatrix}, \qquad B_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

Réduction des endomorphismes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E. On peut montrer que

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \operatorname{id}_E)$$

est un polynôme de degré n en λ, appelé polynôme caractéristique de f. Les zéros de ce polynômes (dans $\mathbb{K}$) sont appelés *valeurs propres* de f. Si λ est une telle valeur propre, l'espace vectoriel $\ker(f - \lambda \operatorname{id}_E)$ (non réduit à $\{\vec{0}_E\}$) est appelé *sous-espace propre* de f pour la valeur propre λ. Les éléments non nuls de ce sous-espace propre sont appelés *vecteurs propres* pour la valeur propre λ.

Réduire l'endomorphisme f, c'est trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ a une forme simple. Lorsque E admet une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est diagonale, on dit que f est *diagonalisable*. De même, lorsqu'il existe $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, on dit que f est *trigonalisable*.

Exercice 6. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f\big((x,y)\big) = (x+y, y).$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, puis les vecteurs propres de f.

b) L'endomorphisme f est-il trigonalisable? Diagonalisable?

c) Mêmes questions avec l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$g\big((x,y)\big) = (2x+y, y).$$

Exercice 7. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E, et $\mathcal{B}$ une base de E. On suppose $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ diagonale. Vérifier que les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de f.

Exercice 8. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 \\ -4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Vérifier que les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (3,2,1)$ et $\vec{v}_3 = (0,1,0)$ sont des vecteurs propres de f. Déterminer les valeurs propres associées.

b) Justifier que la famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice A' de f dans $\mathcal{B}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Exercice 9. On fixe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, pour chacun des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrices de représentation les matrices suivantes dans $\mathcal{B}$, le polynôme caractéristique, les valeurs propres et leurs ordres de multiplicité. Déterminer également leur sous-espaces propres et dire si ils sont diagonalisables.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$