ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
EXAMEN DE RATTRAPAGE

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2017-2018

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barème est donné à titre indicatif.

L'exercice d'algorithmique doit être traité sur une feuille à part.

Exercice 1 (3,5)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On considère le système

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} (\lambda+1)x + 3y + 3z = 0 \\ (\lambda+3)x + 5y + 5z = 0 \\ (\lambda+5)x + 7y + 7z = 0. \end{cases}$$

On note E_λ l'ensemble des solutions de (S_λ).

a) Résoudre le système (S_λ) selon les valeurs de λ.

b) Pour quelles valeurs de λ le système (S_λ) est-il un système de Cramer ?

c) Justifier rapidement que E_λ est un espace vectoriel. Déterminer, selon les valeurs de λ, une base et la dimension de E_λ.

Exercice 2 (Cours. 4,5)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E

a) Rappeler la définition de "$\mathcal{F}$ est une famille liée". Rappeler la définition de "$\mathcal{F}$ est une famille libre".

b) Donner un exemple de famille libre de $\mathbb{R}^3$ à 2 éléments. Donner un exemple de famille liée de $\mathbb{R}^3$ à 2 éléments (tous deux non nuls).

c) Existe-t-il une famille libre de $\mathbb{R}^2$ à 3 éléments ? Existe-t-il une famille liée de $\mathbb{R}^3$ à 1 élément ? Justifier rigoureusement.

d) Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E. Donner une relation entre les dimensions de F, de G, de $F+G$ et de $F \cap G$.

e) On note p la dimension de $F \cap G$, q la dimension de F et r la dimension de G. On se donne une base $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq p}$ de $F \cap G$. On complète cette base en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{f}_{p+1}, \dots, \vec{f}_q)$ de F et en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{g}_{p+1}, \dots, \vec{g}_r)$ de G. Construire comme dans le cours, à l'aide de ces trois bases, une base de $F+G$. On ne admettra que c'est une base de $F+G$. En déduire la relation entre les dimensions donnée à la question précédente.

Exercice 3 (6)**.**

a) Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F des espaces vectoriels. Rappeler la définition d'une application linéaire de E dans F.

Date: 21 juin 2018.

b) Soit $\vec{e}_1 = (-1, 2, 0)$, $\vec{e}_2 = (-2, 5, 1)$ et $\vec{e}_3 = (0, 1, 2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f\big((x, y, z)\big) = (4x + 2y - 3z, -12x - 6y + 8z, -4x - 2y + 2z).$$

Donner la matrice de représentation de f avec la base canonique comme base de départ et d'arrivée.

d) Déterminer la matrice M de représentation de f avec $\mathcal{B}$ comme base de départ et d'arrivée.

e) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

f) Calculer M^2 puis M^3. Déterminer $f \circ f \circ f$.

Exercice 4 (2,5)**.** Soit $\vec{u}_1 = (5, -1, -1)$, $\vec{u}_2 = (4, 2, -2)$. Soit $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Déterminer une description cartésienne de F.

Exercice 5 (2)**.**

a) Donner une relation entre les déterminants

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ et } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Justifier.

b) Calculer D_2, puis D_1.

Exercice 6 (Algorithmique, 2pts)**.** Écrire une fonction
`int diagonale(float* M, int n)`
qui renvoie 1 si la matrice M (de taille $n \times n$) est diagonale, ou 0 sinon.