ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
CORRECTION DE L'EXAMEN DE RATTRAPAGE

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2017-2018

L'exercice d'algorithmique doit être traité sur une feuille à part.

Exercice 1 (3,5)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On considère le système

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} (\lambda+1)x + 3y + 3z = 0 \\ (\lambda+3)x + 5y + 5z = 0 \\ (\lambda+5)x + 7y + 7z = 0. \end{cases}$$

On note E_λ l'ensemble des solutions de (S_λ).

a) 1,5pt Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$, le système (S_λ) est équivalent à

$$\begin{cases} (\lambda+1)x + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + 4z = 0. \end{cases}$$

On voit que les deux dernières lignes de ce système sont proportionnelles, et toutes deux équivalentes à l'équation $x + y + z = 0$. Le système (S_λ) est donc équivalent à

$$\begin{cases} (\lambda+1)x + 3y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda-2)x = 0 \quad (L_1) - 3(L_2) \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Lorsque $\lambda = 2$, la première équation s'écrit $0 = 0$. Le système (S_2) est donc équivalent à l'équation $x + y + z = 0$. L'ensemble des solutions est

$$E_2 = \{(-y - z, y, z)\ ,\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Lorsque $\lambda \neq 2$, on peut diviser la première ligne par 2. Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x = 0 \quad (L_1) - 3(L_2) \\ y + z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$E_\lambda = \{(0, -z, z)\ ,\ z \in \mathbb{R}\}\,.$$

b) 0,5pt Le système (S_λ) a toujours une infinité de solutions. Ce n'est jamais un système de Cramer.

c) 1,5pt L'ensemble E_λ est l'ensemble des solutions d'un système *homogène* à 3 inconnues réelles. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par la question 1, on a :

$$E_2 = \Big\{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)\ ,\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\Big\} = \operatorname{vect}\Big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\Big).$$

C'est un espace vectoriel de dimension 2, ayant pour base $\Big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\Big)$.

Lorsque $\lambda \neq 2$, toujours par la question 1,

$$E_2 = \Big\{z(0, -1, 1)\ ,\ z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Date: 21 juin 2018.

C'est un espace vectoriel de dimension 1 (une droite) qui a pour base $\big((0,-1,1)\big)$.

Exercice 2 (Cours. 4,5)**.** Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E

a) 1pt La famille $\mathcal{F}$ est *liée* quand il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{\vec{0}_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\vec{u}_j=\vec{0}_{\mathbb{K}^n}.$$

La famille $\mathcal{F}$ est *libre* quand elle n'est pas liée, c'est à dire quand pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\vec{u}_j=\vec{0}_{\mathbb{K}^n}\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$$

b) 1pt Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels. La famille $\big((1,2,0),(1,0,0)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. La famille $\big((2,0,0),(1,0,0)\big)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

c) 1pt Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension 2 a au plus 2 éléments. Il n'existe donc pas de famille libre de $\mathbb{R}^2$ à 3 éléments. La famille $\big((0,0,0)\big)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$ à 1 seul élément. En effet

$$1(0,0,0)=(0,0,0).$$

d) 0,5pt Par le cours

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

e) 1pt Pour montrer la relation précédente, on montre que

$$\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p,f_{p+1},\dots,f_q,g_{p+1},\dots,g_r)$$

est une base de $F+G$. On en déduit que la dimension de $F+G$ est le nombre d'éléments de $\mathcal{B}$, soit

$$p+(q-p)+(r-p)=q+r-p,$$

ce qui donne exactement la relation de la question précédente.

Exercice 3 (6)**.**

a) 1pt Soient $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F des espaces vectoriels. L'application linéaire f de E dans F est *linéaire* quand les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}&\forall(\vec{x},\vec{y})\in E,\quad f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})\\&\forall\vec{x}\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\quad f(\lambda\vec{x})=\lambda f(\vec{x}).\end{aligned}$$

b) 1pt C'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que le déterminant formé par les coefficients de la matrice est non nul. Ce déterminant vaut (en utilisant la règle de Sarrus)

$$\begin{vmatrix}-1&-2&0\\2&5&1\\0&1&2\end{vmatrix}=-10+8+1=-1.$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

c) 0,5pt On écrit

$$f\big((x,y,z)\big)=\begin{array}{lll}(4x&+2y&-3z,\\-12x&-6y&+8z,\\-4x&-2y&+2z).\end{array}$$

La matrice de représentation de f avec la base canonique comme base de départ et d'arrivée se lit sur cette formule :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -12 & -6 & 8 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

d) 1pt On a

$$f(\vec{e}_1) = (0,0,0), \quad f(\vec{e}_2) = (-1,2,0) = \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_3) = (-4,10,2) = 2\vec{e}_2.$$

La matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) 1,5pt Puisque $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on sait que l'image de f est engendrée par

$$(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)).$$

On en déduit par la question précédente que l'image de f est engendrée par la famille libre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$: c'est un espace vectoriel de dimension 2 qui a pour base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Par le théorème du rang, le noyau de f est de dimension $3 - 2 = 1$, et puisque $f(\vec{e}_1) = \vec{0}$, c'est exactement $\mathrm{vect}(\vec{e}_1)$ (en d'autres termes, $(\vec{e}_1)$ est une base de $\ker f$.

f) 1pt Par la formule du produit matriciel, on a :

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'endomorphisme $f \circ f \circ f$ de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice de représentation $M^3 = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. On en déduit que $f \circ f \circ f$ est la fonction constante nulle.

Exercice 4 (2,5)**.** Soit $\vec{u}_1 = (5, -1, -1)$, $\vec{u}_2 = (4, 2, -2)$. Soit $F = \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Par définition, $(x, y, z) \in F$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(x, y, z) = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2,$$

c'est à dire si et seulement si le système suivant, d'inconnues (λ, μ), est compatible

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} 5\lambda + 4\mu = x \\ -\lambda + 2\mu = y \\ -\lambda - 2\mu = z \end{cases}$$

On échelonne par la méthode du pivot de Gauss. Par les opérations $(L_1) \leftrightarrow (L_3)$, puis $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) + 5(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) + \frac{3}{2}(L_2)$, puis $(L_3) \leftarrow 2(L_3)$ on obtient que le système (S) est équivalent au système échelonné :

$$\begin{cases} -\lambda - 2\mu = z \\ \qquad 4\mu = y - z \\ \qquad\quad 0 = 2x + 3y + 7z. \end{cases}$$

Ce système est compatible si et seulement si $2x + 3y + 7z = 0$. On a donc

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ t.q. } 2x + 3y + 7z = 0\right\}.$$

Exercice 5 (2)**.**

a) 1pt Soit

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ et } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

On voit que D_1 est obtenu à partir de D_2 en échangeant les 2 premières lignes, puis en multipliant les 2 premières lignes par 2. On a donc :

$$D_1 = -2 \times 2 \times D_2 = -4 \times D_2.$$

b) 1pt

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (L_2) - (L_1) \\ (L_3) - (L_1) \\ (L_4) - (L_1) \end{matrix}$$

Puisque le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égale au produit de ses éléments diagonaux, on en déduit

$$D_2 = 6,$$

et par la question précédente

$$D_1 = -24.$$

Exercice 6 (Algorithmique, 2pts)**.** La fonction

```
int diagonale(float* M, int n)
{
 for(int i=0; i<n; i++)
    for(int j=0; j<n; j++)
        if (i!=j & M[i*n+j]!=0)
            return 0;
 return 1;
}
```

renvoie 1 si la matrice M (de taille $n \times n$) est diagonale, ou 0 sinon.