ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2017-2018

Durée : 2 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (1 + 2,5 pts)**.** On considère le système suivant, d'inconnues réelles x et y :

$$(S) \qquad \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ -\lambda x + \lambda y = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

a) Donner la définition d'un système de Cramer. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ ce système est-il un système de Cramer ?
b) Résoudre le système, quelle que soit la valeur de λ.

Exercice 2 (2,5 pts)**.** Inverser la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -10 \\ -2 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

par la méthode du pivot de Gauß.

Exercice 3 (1 + 1 + 1,5 pts)**.** Soient p, q, r, n des entiers naturels non nuls, $B = [b_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ une matrice $p \times q$ et $C = [c_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice $r \times n$.
a) A quelle(s) condition(s) sur p, q, r, n la somme $D = B + C$ est-elle définie ? De quelle dimension est alors la matrice D ? Exprimer les coefficients $d_{i,j}$ de D en fonctions des coefficients $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$.
b) A quelle(s) condition(s) sur p, q, r, n le produit $E = BC$ est-il défini ? De quelle dimension est alors la matrice E ? Exprimer les coefficients $e_{i,j}$ de E en fonctions des coefficients $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$.
c) Soit

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer, quand c'est possible, MN, NM, M^2, N^2.

T.S.V.P.

Date: Mercredi 21 février 2018.

Exercice 4 (1 + 2 + 1,5 pts)**.**
a) Donner les racines du polynôme $Q = X^2 + 8X + 16$ et leurs ordres de multiplicité.
b) Soit $P = X^4 + 8X^3 + 18X^2 + 16X + 32$. Effectuer la division Euclidienne de P par Q.
c) Donner les racines complexes de P et leurs ordres de multiplicité. Combien P a-t-il de racines complexes distinctes ? De racines complexes comptées avec multiplicité ?

Exercice 5 (1 + 1 + 2 pts)**.** Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
a) On suppose $V = \mathbb{C}^3$. Donner deux exemples de sous espaces vectoriels de V. Donner un exemple de sous-ensemble de V qui n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

Dans les deux questions suivantes, G et H sont deux sous-espaces vectoriels de V.
b) Montrer que $G \cap H$ est un sous-espace vectoriel de G.
c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur G et H la réunion $G \cup H$ est-elle un sous-espace vectoriel de V ? Démontrer cette affirmation.

Exercice 6 (Exercice d'algorithmique, 3 pts)**.** Faire cet exercice sur une feuille séparée et la rendre à part. Les matrices seront allouées dynamiquement comme en TD/TP.

(i) Écrire une fonction qui renvoie la matrice identité de taille n.
(ii) Écrire une fonction qui vérifie si une matrice donnée est symétrique.
(iii) Donner la complexité asymptotique des deux fonctions précédentes.