Université Paris 13

Institut Galilée

Eppur si muove !

Institut Galilée

Nom :

Prénom :

N° de la carte étudiant :

Note :

Formation : L1

Observations :

Date de l'Épreuve : 2/1/2/18

Épreuve de : Algèbre linéaire et algorithmique – Corrigé

Exo. 1 : (a) Soit (S) un système d'équations linéaires, à p inconnues. (S) est dit de Cramer si le nombre d'équations n est égal à p, et si (S) admet une et une seule solution.

(b) $$\begin{cases} \lambda x + y = 1 & (L1) \\ -\lambda x + \lambda y = 2\lambda + 1 & (L2) \end{cases}$$

$$(S')\begin{cases} \lambda x + y = 1 & (L1) \\ (\lambda+1) y = 2(\lambda+1) & (L2)+(L1) \end{cases}$$

Le cas $\lambda = -1$: $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Il y a un nombre infini de solutions : $\{(y-1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Le cas $\lambda = 0$: $y = 1$

$y = 2 \cdot 1 = 2$

Il n'y a pas de solution.

Les autres cas ($\lambda \notin \{-1, 0\}$) : La matrice des coefficients associée à (S) est $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{pmatrix}$; son déterminant vaut $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$.

L'inverse de la matrice est donc $\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ \lambda & \lambda\end{pmatrix}$,

et pour obtenir l'unique solution de (S), il faut multiplier cette matrice par le second membre $\begin{pmatrix}1\\ 2\lambda+1\end{pmatrix}$. Donc,

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ \lambda & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\lambda+1\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\begin{pmatrix}-\lambda-1\\ 2\lambda+2\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}(\lambda+1)\begin{pmatrix}-1\\ 2\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\lambda}\\ 2\end{pmatrix}.$$

Donc, $(x,y) = \left(-\frac{1}{\lambda}, 2\right)$ est l'unique solution de (S).

<u>Exo. 2 :</u>

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -3\\ -3 & -2 & -10\\ -2 & -1 & -8\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(L1)\\ (L2)\\ (L3)\end{array}\end{array} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -3 & -2 & -10\\ -2 & -1 & -8\end{pmatrix} & \begin{array}{c}-(L1)\\ (L2)\\ (L3)\end{array}\end{array} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(L1)\\ (L2)+(L1)-(L3)\\ (L3)+2(L1)\end{array}\end{array} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(L1)-(L3)\\ (L2)\\ (L3)+2(L2)\end{array}\end{array} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -4 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(L1)\\ (L2)\\ \updownarrow\\ (L3)\end{array}\end{array} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -4 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(L1)-5(L3)\\ \\ \end{array}\end{array} \quad \begin{pmatrix}6 & -5 & 4\\ -4 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Donc, la matrice est inversible !

2

On peut vérifier : $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -10 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = I_3$.

Donc, l'inverse de la matrice en question est bien égale à

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exo. 3 : (a) $p = r$ et $q = n$.

$D = [d_{i,j}]$ est alors de dimension $p \times n$, et

$$d_{i,j} = b_{i,j} + c_{i,j} \quad , 1 \leq i \leq p, \ 1 \leq j \leq n.$$

(b) $q = r$.

$E = [e_{i,j}]$ est alors de dimension $p \times n$, et

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} b_{i,k} c_{k,j} \quad , 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n.$$

(c) MN et M^2 n'existent pas d'après (b).

$$NM = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -20 & 2 \\ -4 & 12 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Exo. 4 : (a) $Q = X^2 + 8X + 16 = (X+4)^2$.

-4 est donc la seule racine de Q, et elle est double.

(b)

$X^4 + 8X^3 + 18X^2 + 16X + 32$	$X^2 + 8X + 16$
$X^4 + 8X^3 + 16X^2$	$X^2 + 2$
$2X^2 + 16X + 32$	
$2X^2 + 16X + 32$	
0	

Donc, $P = (X^2+2)\cdot Q + 0$ $(R=0)$.

(c) voir page 5.

Exo. 5: (a) $\{0\}$ et V sont deux sous-espaces vectoriels de V, pour des raisons triviales.

L'ensemble vide ~~est~~ $\emptyset$ n'est pas un sous-espace vectoriel de V car $0 \notin \emptyset$.

(b) · $0 \in G$ et $0 \in H$, donc $0 \in G \cap H$,

· si $x \in G \cap H$ et $y \in G \cap H$, alors $x+y \in G$ et $x+y \in H$ (car G et H sont des sous-e.v.),

donc $x+y \in G \cap H$,

· si $x \in G \cap H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda x \in G$ et $\lambda x \in H$ (car G et H sont des sous-e.v.),

donc $\lambda x \in G \cap H$.

(c) $G \cup H$ est un sous-e.v. de V ssi $G \subset H$ ou $H \subset G$:

"si": c'est clair car alors, $G \cup H = G$ ou $G \cup H = H$.

"seulement si": supposons que $G \cup H$ est un sous-e.v. de V, et que $G \not\subset H$.

Il faut montrer que $H \subset G$: soit alors $x \in H$.

Puisque $G \not\subset H$, $\exists\, y \in G$, $y \notin H$.

x et y appartiennent à $G \cup H$, donc $x+y \in G \cup H$ (car $G \cup H$ est un sous-e.v.).

Mais $x+y \notin H$ – sinon,

$y = (x+y) - \underset{\underset{H}{\cap}}{x} \in H$ (car H est un sous-e.v.),

contrairement à l'hypothèse.

Donc, $x+y \in G$, et

$x = (x+y) - y \in G$ (car G est un sous e.v.).

(CQFD)

Intercalaire n° : ______ NOM, Prénom : ______________________ Date : ______________

Exo 4 : (c) P étant de degré 4, et le corps $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, il y a a priori 4 racines comptées avec multiplicité de P. Plus précisément :

$$P = (X^2+2)\cdot Q \quad \text{d'après (b)},$$

et -4 est racine double de Q. Les racines de X^2+2 sont $\sqrt{2}\cdot i$ et $-\sqrt{2}\cdot i$, toutes les deux simples. P a donc 3 racines distinctes : -4, $\sqrt{2}\cdot i$ et $-\sqrt{2}\cdot i$; -4 est une racines double, et $\sqrt{2}\cdot i$ et $-\sqrt{2}\cdot i$ sont des racines simples.

/5