ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE PROGRAMME DU PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2017-2018

Tout le contenu des cours et TD d'algèbre linéaire et algorithmique et des TP d'algorithmique sont au programme du Partiel 2 du cours d'algèbre linéaire et algorithmique, à l'exclusion du vocabulaire du Chapitre 8, 4.b (réduction des endomorphismes, vecteurs et valeurs propres). Il est toutefois fortement conseillé d'étudier cette dernière partie comme illustration du cours sur les applications linéaires.

Le Partiel 2 comprendra des questions de cours de mathématiques, des exercices de mathématiques et un exercice d'algorithmique. En mathématiques, le deuxième tome du polycopié, qui n'était pas au programme du partiel I aura un poids plus important.

La base du cours est le polycopié dont les deux tomes ont été distribués aux étudiants et sont disponibles sur la page web :
`https://www.math.univ-paris13.fr/~duyckaer/enseignement.html`
Le polycopié se suffit à lui-même. Si il est bien sûr autorisé de travailler sur d'autres documents (notamment les livres de niveau licence dont les références sont dans le polycopié), il est fortement déconseillé de remplacer la lecture du polycopié par celle de cours trouvés sur internet grâce à une recherche par mots-clés mal maîtrisée.

Une simple révision des exercices vus en travaux dirigés et une connaissance mécanique de quelques exercices types ne devrait pas être suffisantes pour valider l'UE. Un des buts principaux du partiel 2 est de tester la connaissance et la compréhension du cours. Il est conseillé aux étudiants de réviser **tous les chapitres du cours** et en particulier les chapitres V, VI et VII, d'apprendre parfaitement les définitions et les énoncés, et de travailler toutes les démonstrations.

Il est important de faire le lien entre les différentes parties du cours : décrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en employant le vocabulaire des espaces vectoriels ; faire la correspondance entre les opérations élémentaires sur des lignes d'une matrice et les multiplications à gauche par les matrices élémentaires ; maîtriser la notion de matrice de représentation d'une application linéaire, faire des calculs sur les applications linéaires à l'aide des matrices ; utiliser le déterminant pour montrer qu'un famille est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$;

Date: 23 avril 2018.

faire le lien entre systèmes de Cramer, matrices inversibles et isomorphismes ; faire le lien entre le rang d'une matrice, d'un endomorphisme et d'une famille de vecteurs.

Quelques exemples de questions de cours possibles :

— Toutes définition et notation du cours.

— Tout énoncé (Théorème, Lemme, Proposition) du cours. Il faut connaître des **exemples** illustrant les définitions et les résultats du cours.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner la définition d'une famille libre de E, d'une famille génératrice de E. Donner un exemple de famille libre et non génératrice (respectivement génératrice et non libre, ni libre ni génératrice) de $\mathbb{R}^3$. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E et $\vec{u} \in E$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\vec{u}$ et $\text{vect}(\mathcal{L})$ pour que $\mathcal{L} \cup (\vec{u})$ soit libre ("Lemme utile sur les familles libres" du cours). Démontrer cette condition.

— Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Montrer qu'il existe une base de E contenue dans $\mathcal{G}$.

— Enoncer et démontrer le théorème de la base incomplète.

— Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie n. On se donne une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E et une famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de F. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de E dans F telle que
$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad f(\vec{e}_j) = \vec{u}_j.$$

— Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'image de f est un sous-espace de F. Montrer que f est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{\vec{0}_E\}$.

— Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une relation entre les dimensions de E, du noyau de f et de l'image de f. Démontrer cette relation. Donner un exemple d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont le noyau est de dimension 1 et l'image de dimension 2.

— Soit E et F deux espaces vectoriels. Donner la définition de "E est isomorphe à F". Si E est un espace vectoriel de dimension n, montrer que E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.