Université Paris 13 - Institut Galilée

2012-2013

Licence 1

Mathématiques 2 - Algèbre linéaire

QUESTIONS À PRÉPARER SUR LES ESPACES VECTORIELS

Dans toute la feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. On considère le système linéaire (S) suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y-z & = & 0 \\ 4x-2y-3z & = & 0 \end{array} \right.$$

   a) Montrer que l'ensemble E des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   b) Proposer un vecteur qui engendre E.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (2,2,0)$ et $\overrightarrow{u_2} = (-1,2,3)$.
   Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (0,6,6)$ et $\overrightarrow{v_2} = (3,0,-3)$.

   a) Montrer que $F = G$.

   b) Montrer que $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, -x+y-z=0\big\}$.

3. On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 2x+y-z=0\big\} \quad \text{et} \quad G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x-4y+3z=0\big\}.$$

   a) Montrer que F est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (-1,2,0)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,0,2)$.
   Montrer que G est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (4,1,0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-3,0,1)$.

   b) Déterminer $H = F \cap G$.
   Proposer un vecteur $\overrightarrow{w}$ qui engendre H. Exprimer $\overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, puis avec $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

   c) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

4. On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}.$$

   a) Montrer que le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices A et B est égal au sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices C et D.

b) Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$M \in F \iff \begin{cases} 2a - 4b + 3c &= 0 \\ 6b + c - 2d &= 0. \end{cases}$$

5. QUESTION DE COURS

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{u_1}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ une famille de n vecteurs de E.

On note Vect $(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.

a) Montrer que Vect $(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Soit G un sous-espace vectoriel de E. Montrer que :

$$\text{Vect}\,(\mathcal{F}) \subset G \iff \mathcal{F} \subset G.$$

c) Montrer que Vect $(\mathcal{F})$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.

6. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

On considère les trois vecteurs :

$$\overrightarrow{u}_1 = (1,1,1,-3), \quad \overrightarrow{u}_2 = (-3,1,1,1), \quad \overrightarrow{v} = (1,-1,1,-1),$$

ainsi que les trois sous-espaces vectoriels :

$$P = \text{Vect}\,\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}, \quad D = \text{Vect}\,\{\overrightarrow{v}\} \quad \text{et} \quad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x+y+z+t=0\}.$$

a) Montrer que $D \subset F$ et que $P \subset F$.

b) Montrer que $D \oplus P = F$.

c) Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^4$, on pose $\Delta_{\overrightarrow{w}} = \text{Vect}\,\{\overrightarrow{w}\}$.
Proposer un vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^4$ tel que :

$$F \oplus \Delta_{\overrightarrow{w}} = \mathbb{R}^4.$$

7. Soit n un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}$ l'ensembles des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\, {}^{\mathrm{t}}M = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\, {}^{\mathrm{t}}M = -M\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. On note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\mathbb{C}_0[X]$, ensemble des polynômes constants de $\mathbb{C}[X]$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui s'annulent en 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

c) Montrer que $\mathbb{C}_0[X] \oplus \mathcal{F} = \mathbb{C}[X]$.