Université Paris 13 - Institut Galilée

2012-2013

Licence 1

Mathématiques 2 - Algèbre linéaire

TD3 : ESPACES VECTORIELS

Dans toute la feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x - 2y + 3z = 0\big\}.$$

   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$(x, y, z) \in F \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y, z) = y\,(2, 1, 0) + z\,(-3, 0, 1).$$

   c) Proposer deux vecteurs qui engendrent F.

2. On considère le système linéaire (S) suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z - 2t & = & 0 \\ y - z + t & = & 0 \\ x - 3y + 4z - 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

   a) Montrer que l'ensemble E des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss. On précisera les variables de base et les variables libres, et on exprimera E à l'aide des variables libres.

   c) Proposer deux vecteurs qui engendrent E.

3. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, précisez lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

   a) $F_a = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\big\}$;

   b) $F_b = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, y = 1\big\}$;

   c) $F_c = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, xyz = 0\big\}$;

   d) $F_d = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z = 0\big\}$;

   e) $F_e = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z = x + y\big\}$;

   f) $F_f = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, |x + y| = |z|\big\}$;

   g) $F_g = \big\{(x, 0, 2x + y) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$.

4. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (3,0,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,-1,2)$.
   Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (5,1,0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (6,-3,7)$.
   a) Montrer que $F = G$.
   b) Montrer que $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x - 5y - 3z = 0\big\}$.

5. On considère un triplet (a,b,c) de réels non tous trois nuls ($(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$).
   On note $F_{(a,b,c)}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $ax+by+cz=0$:
$$F_{(a,b,c)} = \big\{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, ax+by+cz=0\big\}.$$
   a) Montrer que $F_{(a,b,c)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   b) Soit (a',b',c') un autre triplet de réels non tous trois nuls. À quelle condition sur les triplets (a,b,c) et (a',b',c') a-t-on :
$$F_{(a',b',c')} = F_{(a,b,c)}\ ?$$
   c) Est-il possible de trouver deux triplets de réels non tous trois nuls (a,b,c) et (a',b',c') tels que :
$$F_{(a',b',c')} \cap F_{(a,b,c)} = \big\{\overrightarrow{0}\big\}\ ?$$

6. On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$$F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = x+y\big\} \quad \text{et} \quad G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = 0\big\}.$$
   a) Montrer que F est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1,0,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (0,1,1)$.
   Montrer que G est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1,0,0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0,1,0)$.
   b) Déterminer $H = F \cap G$.
   Proposer un vecteur $\overrightarrow{w}$ qui engendre H. Exprimer $\overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, puis avec $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
   c) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

7. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, précisez lesquels sont des sous-espaces vectoriels :
   a) $G_a = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$;
   b) $G_b = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a \geqslant 0 \right\}$;
   c) $G_c = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; ad - bc = 0 \right\}$;
   d) $G_d = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\, M \text{ est inversible} \right\}$;
   e) $G_e = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\, M \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
   f) $G_f = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

8. a) On considère le sous-espace vectoriel G_f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$G_f = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Montrer que $G_f = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

b) On considère le sous-espace vectoriel G_e de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$G_e = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\ M \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Montrer que G_e est engendré par les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

9. On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices A et B est égal au sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices C et D.

b) Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$M \in F \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a + 3b - c & = & 0 \\ -2b + 2c + d & = & 0. \end{array} \right.$$

10. On note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\mathbb{C}_3[X]$, ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à 3, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui s'annulent en 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

c) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes pairs de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathcal{I}$ l'ensemble des polynômes impairs de $\mathbb{C}[X]$.
Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[X]$.
Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathbb{C}[X]$.

11. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

- $P_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x = 0\}$,
- $P_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ y = 0\}$,
- $P_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = 0\}$,
- D_x est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$,
- D_y est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$,
- D_z est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$,

a) Montrer (au choix) que $P_x \cap P_y = D_z$, que $P_y \cap P_z = D_x$, que $P_z \cap P_x = D_y$.

b) Montrer (au choix) que $D_x \oplus D_y = P_z$, que $D_y \oplus D_z = P_x$, que $D_z \oplus D_x = P_y$.

c) Montrer (au choix) que $P_x + P_y = \mathbb{R}^3$, que $P_y + P_z = \mathbb{R}^3$, que $P_z + P_x = \mathbb{R}^3$.

d) Montrer (au choix) que $P_x \oplus D_x = \mathbb{R}^3$, que $P_y \oplus D_y = \mathbb{R}^3$, que $P_z \oplus D_z = \mathbb{R}^3$.

12. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On note respectivement $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices triangulaires supérieures, triangulaires inférieures et diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
– $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,;\, i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0\big\}$,
– $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,;\, j > i \Longrightarrow a_{ij} = 0\big\}$,
– $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,;\, i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0\big\}$.

a) Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

c) Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

13. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.
On note F_A l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A :

$$F_A = \big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, AM = MA\big\}.$$

On note G_A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I_3, A et A^2 :

$$G_A = \text{Vect}\big\{I_3, A, A^2\big\}.$$

a) Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $G_A \subset F_A$.
Proposer une matrice A (simple !) telle que $G_A \subsetneq F_A$.

c) Dans cette question, on pose :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que F_A est engendré par les matrices :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Dans cette question, on pose :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Montrer que F_A est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que $G_A = F_A$.