L1, algèbre linéaire
2012/2013
Mathématiques

Université Paris 13

TD1 : Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. Déterminer quatre solutions (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation $2x - y - 3z = 3$. Décrire toutes les solutions de cette équation.

Exercice 2. Déterminer trois solutions (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation $x - 2z = 1$. Décrire toutes les solutions de cette équation.

Exercice 3. Déterminer si possible dans l'ensemble des complexes deux solutions de chacun des systèmes d'inconnues x et y pour (a) et (b) et d'inconnues x, y et z pour (c), puis donner l'ensemble des solutions de ces systèmes.

$$(a)\begin{cases} 2x + iy = i \\ 2ix - y = -1. \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x - iy = 2 \\ ix + 2y = -1. \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x + iy - z = -1 \\ x - y = 2i. \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y et z :

$$(a)\begin{cases} -5x - y - z = 0 \\ 5y + 24x + 5z = -3 \\ -9x + z = -7 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 7y + 5x = 3 \end{cases} \qquad (d)\,\{x = -1$$

$$(e)\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases} \qquad (f)\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - x = 1 \end{cases} \qquad (g)\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ -2x + y + 7z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \qquad (e)\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 40 \\ -3x + 7y - z = 44 \\ x - 4y + 3z = -41 \\ x + 5y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système linéaire suivant, d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :
Pour tout j variant de 1 à 3, $\sum_{k=1}^{3}(k + j)x_k = j$.

Exercice 6. Dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les cinq points $A(1; -1)$, $B(-1; -4)$, $C(3; 4)$, $D(2; 2)$, et $E(3; 2)$. Déterminer, si elle existe, une équation de la ou les paraboles passant par les points :

- A, B et C
- B, C et D.
- A et E

Matrices, formes réduites

Exercice 7. Donner pour chacune des matrices A_j le système linéaire (S_j) dont A_j est la matrice augmentée. La matrice A_j est-elle sous forme échelonnée ? Sous forme échelonnée réduite ? Mettre (si ce n'est pas le cas) A sous forme échelonnée réduite par des opérations élémentaires sur les lignes, puis résoudre (S_j).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 3 & -6 & -3 \\ 4 & 8 & 4 & 4 & -8 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & -6 & -9 \\ -3 & -6 & -3 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Ecrire la matrice augmentée de chacun des systèmes suivants, puis le résoudre à l'aide de la méthode du pivot.

$$(a)\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+2y+3z+4t=2 \\ x+3y+6z+10t=0 \\ x+4y+10z+20t=0,5 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} 4x-6y+4z=-1 \\ -6x+14y-11z=3 \\ -x+3y-3z=1 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ x+2y-3z=6 \\ 7x+4y-z=22 \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} -2x-y=5 \\ -x-z=-1 \\ 2z+y=1 \end{cases} \quad (e)\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2+3x_3-3x_4=-2 \end{cases}$$

Exercice 9. Pour chacune des matrices suivantes dire **sans aucun calcul** si le système dont A_j est la matrice augmentée a une solution, aucune solution ou une infinité de solutions:

$$\begin{pmatrix} 3 & -14 & -\frac{2}{15} & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 6 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 1,1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Systèmes avec paramètres

Exercice 10.

a) Pour quel paramètre réel p les trois droites d'équations $y=-x+1$, $x+2y=-3$ et $x+3y=p$ ont-elles un point d'intersection?

b) Même question pour les droites d'équations $px+3y=6$, $5x-3y=12$ et $-2x-5y=20$.

Exercice 11. Résoudre les systèmes d'inconnues complexe x, y et z et de paramètre complexe m:

$$(a)\quad m(m-1)x+2my+2=0 \qquad (b)\begin{cases} x-y+z=m \\ mx+y-z=1 \\ x-y+mz=1 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} x+my+(m-1)z=m+1 \\ 3x+2y+mz=3 \\ (m-1)x+my+(m+1)z=m-1 \end{cases}$$

Exercice 12. Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction des paramètres réels a, b et c:

$$(a)\begin{cases} ax+z=2 \\ 2x+5y=1 \\ -2x+y+bz=3 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ ax+by+cz=6 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} ax+by+z=1 \\ ax+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Systèmes de Cramer

Exercice 13. Rappeler la définition d'un système de Cramer. Les systèmes suivants sont-ils des systèmes de Cramer? On ne demande pas obligatoirement de résoudre ces systèmes.

$$\begin{cases} x+y+2z=7 \\ y+3z=5 \\ z=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ -x+2y-z=2 \\ x-4y-z=8 \end{cases} \quad \begin{cases} -x-y-3z=-7 \\ -x-2y-5z=-8 \\ x+2z=8 \end{cases} \quad \begin{cases} -x-y-3z=2 \\ -x-2y-5z=0 \\ x+2z=4. \end{cases}$$

Suggestions d'exercices supplémentaires. David C. Lay *Algèbre linéaire, théorie, exercices & applications* chez De Boeck, exercices des chapitres 1.1 et 1.2.

Tran Van Hiep *Algèbre. Cours et exercices* aux PUF, exercices du chapitre 5.