CHAPITRE 1

Systèmes linéaires

Référence principale pour ce chapitre [**Lay04**].

I. Définitions et premiers exemples

A. Définitions. On appellera *nombre* ou *scalaire* un nombre réel ou complexe. On posera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'ensemble de ces nombres. Le choix des nombres réels ou complexes est indifférent dans ce qui suit, sauf pour les interprétations géométriques où l'on privilégiera les nombres réels.

Définition I.1. Soit $n \geq 1$. On appelle *équation linéaire* à n inconnues $x_1,\ldots,x_n$ une équation de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \tag{E}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b sont fixés dans $\mathbb{K}$. Les scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont appelés *coefficients* de l'équation, b est le *second membre*. Lorsque $b = 0$, on dit que l'équation est *homogène*.

Remarque I.2. La notation $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ dans (E) signifie $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Il est impératif de maîtriser ce type de notation.

Définition I.3. L'*ensemble des solutions* de (E) est l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$. C'est donc un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$.

Exemple I.4.

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$$

est une équation linéaire non-homogène à 3 inconnues.

$$-ix_1 + (2+i)x_2 - 4x_3 = 0$$

est une équation linéaire (complexe) homogène à 3 inconnues.

$$2x_1^2 + x_2x_3 - 4x_3^3 = 1$$

n'est pas une équation linéaire.

Définition I.5. Si $m \geq 1$, on appelle *système linéaire* à m équations et n inconnues un ensemble de m équations linéaires ayant les mêmes n inconnues:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{S}$$

Les scalaires a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sont encore appelés les *coefficients* du système. Il est d'usage d'utiliser le premier indice pour numéroter les lignes et le deuxième indice pour numéroter les colonnes. Le m-uplet $b = (b_1, \ldots, b_m)$ est appelé *second membre* du système. Lorsque tous les b_j sont nuls (on dit encore que b est nul), on dit que le système est *homogène*.

L'*ensemble des solutions de* (S) est le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ formé des $(x_1, \dots, x_n)$ qui vérifient *toutes* les équations de (S). On cherche à résoudre le système (S), c'est à dire décrire précisément cet ensemble.

Remarque I.6. On peut réecrire le système (S) sous forme abrégée:

$$\forall i = 1 \dots m, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i.$$

Remarque I.7. Lorsque le nombre d'inconnues n est petit, on note souvent x, y, z, t (au lieu de x_1, $x_2 \dots$) ces inconnues pour alléger les notations.

Donnons quelques exemples simples.

Exemples I.8.

$$\begin{cases} 17(x+2y) = \sqrt{7}z + 3 \\ \dfrac{x+z}{2} = 12. \end{cases}$$

est un système linéaire non-homogène, à 2 équations et 3 inconnues, que l'on peut écrire sous la forme (S) (avec $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$):

$$\begin{cases} 17x + 34y - \sqrt{7}z = 3 \\ \dfrac{1}{2}x \ + \ 0y \ + \ \dfrac{1}{2}z = 12. \end{cases}$$

Ici $a_{11} = 17$, $a_{12} = 34$, $a_{13} = -\sqrt{7}$, $a_{21} = \frac{1}{2}$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = \frac{1}{2}$, $b_1 = 3$ et $b_2 = 12$. Le système:

$$\begin{cases} xyz + 7 = 0 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

n'est pas linéaire (la première équation ne peut pas être mise sous la forme d'une équation linéaire). L'équation:

$$(x+y-3)^2 + (2x+y+2)^2 = 0 \tag{1}$$

n'est pas linéaire. Toutefois, si l'on cherche à résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$, elle est équivalente au système linéaire:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + y &= -2. \end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'équation (1) ne peut pas être ramenée à un système linéaire.

Les systèmes linéaires apparaissent dans tous les domaines d'applications des mathématiques (économie, industrie...) Dans les applications, m et n sont souvent très grands, et on ne peut pas résoudre le système "à la main". Il existe évidemment de nombreux logiciels informatiques qui en sont capables. Les buts de ce chapitre sont:

- savoir résoudre "à la main" un système lorsque m et n sont petits;
- comprendre une méthode de résolution d'un système général, la méthode du pivot de Gauss;
- connaître la structure de l'ensemble des solutions, ce qui nous amènera naturellement à la notion d'espace vectoriel, vue au chapitre III.

On commence par donner des exemples de résolutions de systèmes linéaires à une ou deux équations et une ou deux inconnues, puis une notation commode (la notation matricielle) avant de dégager une méthode générale.

B. Exemples de petits systèmes linéaires.

B.1. *Une équation à une inconnue.* On fixe $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. On considère l'équation:

$$ax = b. \tag{2}$$

Alors:

- Si $a\neq 0$, $x=\frac{b}{a}$ est la seule solution de (2).
- Si $a=0$ et $b=0$, l'équation (2) s'écrit $0=0$ et tous les $x\in\mathbb{K}$ sont solutions.
- Si $a=0$ et $b\neq 0$, l'équation (2) s'écrit $b=0$, il n'y a donc pas de solution.

Remarque I.9. L'ensemble des solutions est ou bien vide, ou bien réduit à un seul élément, ou bien infini. Nous verrons plus tard que cette propriété persiste dans le cas d'un système linéaire général.

B.2. *Une équation, deux inconnues.* On considère maintenant l'équation linéaire:

$$ax+by=c. \tag{3}$$

Supposons d'abord $(a,b)\neq(0,0)$. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on sait que (3) est l'équation d'une droite du plan $\mathbb{R}^2$ et il y a une infinité de solutions. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on peut résoudre le système algébriquement:

- si $b\neq 0$, on peut réécrire (3) $y=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x$, et l'ensemble des solutions est
$$\left\{\left(x,\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x\right),\ x\in\mathbb{K}\right\}.$$
On dit qu'on a paramétré cet ensemble (x est le paramètre).
- si $b=0$ et $a\neq 0$, l'équation s'écrit $x=c/a$ et l'ensemble des solutions est donné par $\left\{\left(\frac{c}{a},y\right),\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

Lorsque $(a,b)\neq(0,0)$ il y a donc une infinité de solutions.

Si $(a,b)=(0,0)$, l'équation (3) s'écrit simplement $0=c$: il y a une infinité de solution (tous les couples $(x,y)\in\mathbb{K}^2$) si $c=0$, et aucune solution si $c=0$.

Remarquons que quelles que soient les valeurs de a,b et c, l'équation (3) a ou bien une infinité de solutions, ou bien pas de solution du tout (mais jamais une unique solution).

B.3. *Deux équation, deux inconnues. Opérations sur les lignes.* On considère maintenant un système de la forme:

$$a_{11}x+a_{12}y=b_1 \tag{4}$$
$$a_{21}x+a_{22}y=b_2. \tag{5}$$

Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $(a_{11},a_{12})\neq(0,0)$ et $(a_{21},a_{22})\neq(0,0)$, (4) décrit l'ensemble des points d'intersection de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ du plan $\mathbb{R}^2$. On a donc trois cas:

- Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèlles: elles ont un unique point d'intersection, et (4) n'a qu'une seule solution.
- Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles. Le système (4) n'a pas de solution, sauf si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues, auquel cas le système a une infinité de solutions (l'ensemble des coordonnées des points de la droite $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2$).

On donne maintenant trois exemples que l'on va résoudre algébriquement, sans utiliser d'argument géométrique.

Exemple I.10.

$$\begin{cases} 3x+2y=8 & (L_1)\\ 2x+5y=9 & (L_2).\end{cases} \tag{6}$$

Eliminons l'inconnue "x" de la deuxième ligne à l'aide de la première ligne:

$$\begin{cases} 3x+2y=8 & \\ 0+\left(5-\frac{4}{3}\right)y=\left(9-\frac{16}{3}\right) & (L_2)-\frac{2}{3}(L_1).\end{cases} \tag{7}$$

La notation $(L_2) - \frac{2}{3}(L_1)$ à la deuxième ligne (on écrira parfois $(L_2) \leftarrow (L_2) - \frac{2}{3}(L_1)$) signifie que l'on a remplacé la deuxième ligne par la différence de la deuxième ligne et du produit de $\frac{2}{3}$ par la première ligne.

$$\left\{\begin{aligned} 3x+2y&=8 \\ y&=1 \qquad \tfrac{3}{11}(L_2). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Une fois connue la valeur de y il suffit de la substituer dans (L_1) pour obtenir la valeur de x: on obtient $3x = 8 - 2 = 6$, i.e. $x = 2$. Le système (6) a donc pour unique solution $(2,1)$ (en d'autres termes, l'ensemble des solutions est le singleton $\{(2,1)\}$).

On peut aussi conclure, à partir de (8), en utilisant des opérations sur les lignes:

$$\left\{\begin{aligned} 3x&=6 \qquad (L_1)-2(L_2) \\ y&=1 \end{aligned}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{aligned} x&=2 \qquad \tfrac{1}{3}(L_1) \\ y&=1 \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Exemple I.11.

$$\left\{\begin{aligned} 3x+2y&=8 \\ 6x+4y&=20. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

On élimine x comme dans l'exemple I.10

$$\left\{\begin{aligned} 3x+2y&=8 \\ 0&=4 \qquad (L_2)-2(L_1). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Il n'y a pas de solution.

Exemple I.12.

$$\left\{\begin{aligned} 3x+2y&=8 \\ 6x+4y&=16. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

On utilise la même stratégie:

$$\left\{\begin{aligned} 3x+2y&=8 \\ 0&=0 \qquad (L_2)-2(L_1). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

La deuxième équation est toujours vraie. Le système (12) est donc équivalent à l'équation, $3x+2y = 8$. Il y a, comme dans le paragraphe B.2, toute une droite de solutions, l'ensemble

$$\left\{(x, 4 - \frac{3}{2}x),\ x \in \mathbb{K}\right\}.$$

C. Notation matricielle. Une *matrice* $m \times n$ est un tableau de nombre à m lignes et n colonnes. Nous étudierons les matrices de manière plus systématique dans le chapitre II de ce cours.

Lors des manipulations sur les lignes des exemples précédents, on peut gagner du temps en décidant de ne pas noter les variables:

Définition I.13. On appelle *matrice des coefficients* du système (S) la matrice $m \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{22} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

et *matrice augmentée* la matrice $m \times (n+1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{22} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

(le trait vertical, facultatif, permet de séparer les coefficients du second membre).

On peut reprendre les opérations précédentes en notation matricielle. Par exemple, les manipulations de ligne de l'exemple I.10 s'écrivent:

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & 2 & 8\\ 2 & 5 & 9\end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c}3 & 2 & 8\\ 0 & 5-\frac{4}{3} & 9-\frac{16}{3}\end{array}\right] \; {\scriptstyle (L_2)-\frac{2}{3}(L_1)}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & 2 & 8\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right] \; {\scriptstyle \frac{3}{11}(L_2)} \qquad \left[\begin{array}{cc|c}3 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right] \; {\scriptstyle (L_1)-2(L_2)} \qquad \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right] \; {\scriptstyle \frac{1}{3}(L_1)}$$

ce qui signifie bien $x = 2$, $y = 1$ (cf (9)).

D. Un dernier exemple.

Exercice I.14. On se propose de résoudre le système suivant, en utilisant la notation matricielle:

$$\begin{cases} y - 7 + 3x = -2z \\ x + 2z = 11 + 2y \\ -2x + z - 1 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

a. Mettre le système (14) sous la forme (S), puis donner la matrice augmentée de ce système.

b. Résoudre (14) par des manipulations sur les lignes de sa matrice augmentée.

Correction.

a. On réécrit ce système:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 7 \\ x - 2y + 2z = 11 \\ -2x \qquad + z = 1. \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est donc:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 7\\ 1 & -2 & 2 & 11\\ -2 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

b. (lire de gauche à droite puis de haut en bas)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -4 & -26\\ 1 & -2 & 2 & 11\\ 0 & -4 & 5 & 23\end{array}\right] \begin{array}{l}{\scriptstyle (L_1)-3(L_2)}\\ \\ {\scriptstyle (L_3)+2(L_2)}\end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 11\\ 0 & 7 & -4 & -26\\ 0 & -4 & 5 & 23\end{array}\right] \begin{array}{l}{\scriptstyle (L_2)}\\ {\scriptstyle (L_1)}\\ \\ \end{array} \tag{15}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 11\\ 0 & 7 & -4 & -26\\ 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{57}{7}\end{array}\right] \begin{array}{l}\\ \\ {\scriptstyle (L_3)+\frac{4}{7}(L_2)}\end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 11\\ 0 & 7 & -4 & -26\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \begin{array}{l}\\ \\ {\scriptstyle \frac{7}{19}(L_3)}\end{array} \tag{16}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5\\ 0 & 7 & 0 & -14\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \begin{array}{l}{\scriptstyle (L_1)-2(L_3)}\\ {\scriptstyle (L_2)+4(L_3)}\\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \begin{array}{l}\\ {\scriptstyle \frac{1}{7}(L_2)}\\ \\ \end{array} \tag{17}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \begin{array}{l}{\scriptstyle (L_1)+2(L_2)}\\ \\ \\ \end{array} \tag{18}$$

Le système précédent a donc une unique solution: $(x, y, z) = (1, -2, 3)$.

Exercice I.15. Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4z = -12 \\ -x + y + 3z = 9 \\ x - y + z = 3. \end{cases}$$

II. Méthode du pivot

On veut formaliser et généraliser la méthode précédente pour résoudre des systèmes linéaires quelconques. On commence par donner quelques définitions.

A. Systèmes équivalents. Opérations élémentaires.

Définition II.1. Deux systèmes linéaires ayant le même nombre d'inconnues sont *équivalents* lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple II.2. Les systèmes suivants sont équivalents:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \quad\;\; y=-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ \quad\;\; x=1 \end{cases} \tag{19}$$

En effet, l'ensemble des solutions de ces deux systèmes est $\{(1,-1)\}$. Les deux systèmes suivants ne sont pas équivalents:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \quad\;\; y=-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ \quad\;\; x=-1 \end{cases} \tag{20}$$

En effet, l'ensemble des solutions du premier système est $\{(1,-1)\}$, l'ensemble des solutions du deuxième système est $\{(-1,1)\}$.

Définition II.3. On appelle *opération élémentaire* sur un système (ou sur les lignes d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes:

(i) L'*échange* de deux lignes (L_i) et (L_j), parfois noté $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$.
(ii) La multiplication d'une ligne par un scalaire $k \in \mathbb{K}$ *non nul*, appelé *cadrage*, parfois noté $(L_i) \leftarrow k(L_i)$.
(iii) L'ajout à une ligne du multiple d'une autre ligne par un scalaire k, appelé *remplacement*, parfois noté $(L_i) \leftarrow (L_i) + k(L_j)$.

Le lecteur est invité à vérifier que toutes les opérations réalisées dans les exemples de la partie I sont des opérations élémentaires au sens de la définition II.3. Par exemple, l'opération à droite de (15) constitue un échange de ligne $(L_1) \leftrightarrow (L_2)$. L'opération à droite de (16) est un cadrage $(L_3) \leftarrow \frac{7}{19}(L_3)$. La première opération de (9) est un remplacement $(L_1) \leftarrow (L_1) - 2(L_2)$.

Remarque II.4. Il revient bien sûr au même de faire des opérations élémentaires sur un système d'équations linéaires, ou sur les lignes de la matrice augmentée de ce système.

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions:

Proposition II.5. *Soient (S) et (S') deux systèmes linéaires ayant le même nombre d'inconnues et d'équations. On suppose que (S') peut être obtenu à partir de (S) par une série d'opérations élémentaires. Alors (S) et (S') sont équivalents.*

Démonstration. Par une récurrence simple, il suffit de montrer qu'une seule opération élémentaire ne change pas l'ensemble des solutions.

C'est évident si cette opération élémentaire est l'échange de deux lignes.

Si k est fixé, non nul, alors $ky = 0 \iff y = 0$. Le cadrage (multiplication d'une ligne par un scalaire non nul) ne change donc pas l'ensemble des solutions.

Il reste à traiter le cas du remplacement, i.e. l'opération $(L_j) \leftarrow (L_j) + k(L_i)$, où $i \neq j$, $k \in \mathbb{K}$. En ignorant les lignes autres que la i-ième et la j-ième, qui ne changent pas, on est amené à montrer que les deux systèmes

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (L_i) \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j & (L_j) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (L_i) \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n + k(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) = b_j + kb_i & (L_j') \end{cases}$$

sont équivalents, c'est à dire que $x = (x_1, \dots, x_n)$ vérifie (L_i) et (L_j) si et seulement si il vérifie (L_i) et (L'_j).

On suppose d'abord que x vérifie (L_i) et (L_j). Alors

$$\underbrace{a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n}_{=b_j \text{ par } (L_j)} + k\underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)}_{=b_i \text{ par } (L_i).} = b_j + kb_i,$$

ce qui montre (L'_j).

Supposons réciproquement que x vérifie (L_i) et (L'_j). Alors

$$\begin{aligned} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = \underbrace{a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n + k\left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n\right)}_{=b_j + kb_i \text{ par } (L'_j)} \\ - k\underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)}_{=b_i \text{ par } (L_i)} = b_j, \end{aligned}$$

d'où (L_j). □

Avertissement II.6. Pour passer d'un système linéaire à un système équivalent, il est très fortement conseillé de s'en tenir à des opérations élémentaires au sens de la définition (II.3). Des opérations sur les lignes mal choisies peuvent changer l'ensemble des solutions. Une erreur typique est de réaliser *simultanément* deux remplacements de la forme $(L_i) \leftarrow (L_i) + k(L_j)$ et $(L_j) \leftarrow (L_j) + k'(L_i)$. Par exemple:

$$(21) \qquad \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ donne: } \begin{cases} 3x = 2 & (L_1) + 2(L_2) \\ \dfrac{3}{2}x = 1 & (L_2) + \dfrac{1}{2}(L_1). \end{cases}$$

Les deux systèmes ci-dessus ne sont pas équivalents: le premier a pour unique solution $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, le deuxième a une infinité de solutions: $\left\{\left(\frac{2}{3}, y\right),\ y \in \mathbb{K}\right\}$. Remarquons que les deux opérations simultanées $(L_2) \leftarrow (L_2) + \frac{1}{2}(L_1)$ et $(L_1) \leftarrow (L_1) + 2(L_2)$ ne peuvent pas s'écrire comme deux remplacements successifs. Le lecteur est invité à méditer cet exemple: pratiquement toutes les erreurs dans les résolutions de système, en dehors des fautes de calcul, sont de cette forme là.

B. Forme échelonnée. On définit maintenant un ensemble de matrice correspondant à des systèmes dont on peut décrire l'ensemble des solutions sans aucun calcul supplémentaire. Le but de la méthode du pivot sera de se ramener à ce type de matrice.

B.1. *Définitions.*

Définition II.7. Soit A une matrice $m \times n$. Une *ligne nulle* de A est une ligne de A formée uniquement de zéros. On appelle *élément de tête* d'une ligne non nulle de A l'élément non nul le plus à gauche de cette ligne. On dit que A est *sous forme échelonnée* (ou simplement *échelonné*)lorsque les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

(i) Toutes les lignes non nulles sont situées au-dessus des lignes nulles.
(ii) L'élément de tête de chaque ligne non nulle se trouve dans une colonne (strictement) à droite de l'élément de tête de la ligne précédente.

On dit que A est *sous forme échelonnée réduite* (ou simple *échelonnée réduite*) quand de plus les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

(iii) L'élément de tête de chaque ligne non nulle vaut 1.
(iv) L'élément de tête de chaque ligne non nulle est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Remarque II.8. Le point (ii) implique que tous les éléments de la matrice situés sous un élément de tête sont nuls.

Définition II.9. On dit qu'un système linéaire est *sous forme échelonnée* (respectivement *échelonnée réduite*) quand sa matrice augmentée est sous forme échelonnée (respectivement échelonnée réduite).

Exemples II.10. La matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ n'est pas échelonnée ((i) n'est pas vérifiée).
La matrice $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ n'est pas échelonnée (cette fois, (ii) est faux).
La matrice $C = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ est échelonnée, mais pas échelonnée réduite ((iii) et (iv) sont faux).
La matrice $D = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ est échelonnée, mais pas échelonnée réduite ((iii) est faux).
La matrice $E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ est échelonnée réduite.
La matrice de (18) est échelonnée réduite.

Exemples II.11. Le premier système de (9) est sous forme échelonnée non réduite, le dernier système de (9) est sous forme échelonnée réduite.

Le système (11) est sous forme échelonnée non réduite.

Le système (13) est sous forme échelonnée non réduite. Aprés multiplication de la première ligne par $\frac{1}{3}$, on obtient la forme échelonnée réduite équivalente:

$$\begin{cases} x + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{8}{3} \\ \qquad\quad 0 = 0. \end{cases}$$

Dans ce système la deuxième ligne $0 = 0$ est bien sur superflue.

Exercice II.12. Déterminer si les systèmes suivants sont sous forme échelonnée (respectivement sous forme échelonnée réduite):

(i) Un système à une seule équation.

(ii)

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

(iii)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(iv)

$$(S_1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ \qquad y + 2z = -1 \\ \qquad\qquad z = -4 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \\ \qquad x - z = -4 \end{cases}$$

B.2. *Application aux systèmes linéaires.*

Définition II.13. Le système (S) est dit *compatible* si il a au moins une solution et *incompatible* si il n'a pas de solution.

On peut décrire facilement l'ensemble des solutions d'un système linéaire (S) dont la matrice augmentée A est sous forme échelonnée réduite. On rappelle que si (S) est un système à m équations et n inconnue, la matrice A est une matrice $m \times (n+1)$ (i.e. un tableau de nombres avec m lignes et $n+1$ colonnes).

On distingue deux cas.

Premier cas: Si la colonne la plus à droite (la $n+1$-ème colonne) de A contient un élément de tête (forcément égal à 1) cela se traduit par une équation $0 = 1$, tautologiquement fausse, ce qui montre que le système n'a pas de solution. Le système (S) est incompatible.

Deuxième cas: Supposons que la colonne de droite de A ne contient aucun élément de tête. Dans ce cas, le système est compatible. Donnons une méthode pour décrire l'ensemble des solutions. L'élément de tête de chaque ligne non nulle, situé sur une des n premières colonnes, correspond donc à une des inconnues $x_1, \ldots x_n$. On appelle *variable de base* du système toute inconnue x_j telle que la j-ième colonne contient un élément de tête non nul. On appelle *variable libre* ou *paramètre* les autres inconnues. Chaque ligne non nulle donne une expression d'une des variables de base en fonction des paramètres. En faisant varier les paramètres dans $\mathbb{K}$, on obtient exactement l'ensemble des solutions du système. On dit que l'on a obtenu une *description paramétrique* de l'ensemble des solutions.

On peut maintenant donner une définition plus précise de la résolution d'un système linéaire: résoudre le système (S), c'est donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

Remarque II.14. Un cas particulier de système compatible est donné par un système dont la matrice sous forme échelonnée réduite a autant de lignes non nulles qu'il y a d'inconnues. Dans ce cas, toutes les variables sont des variables de base, et il n'y a qu'une seule solution, dont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont données par les valeurs de la colonne de droite.

Remarque II.15. Il n'est pas nécessaire de mettre un système sous forme échelonnée réduite pour savoir si il est compatible ou non: une forme échelonnée non réduite convient tout aussi bien. Par le même raisonnement que précédemment, un système sous forme échelonnée est compatible si et seulement si la colonne de droite de sa matrice augmentée ne contient aucun élément de tête.

Lorsque le système est compatible, la forme échelonnée réduite est commode pour décrire l'ensemble des solutions.

Exemple II.16. On suppose que la matrice augmentée du système (S) est

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{array}\right]$$

C'est une matrice de forme échelonnée réduite, dont les éléments de tête sont les "1" en gras. La colonne de droite ne contient aucun élément de tête: le système est compatible. Les variables de base (correspondant aux numéros des colonnes des éléments de tête) sont x_1, x_2 et x_4. Le seul paramètre est x_3. On obtient la description paramétrique suivante de l'ensemble des solutions:

$$x_1 = 4 - x_3,\ x_2 = 3 - 2x_3,\ x_4 = 5,\ x_3 \in \mathbb{K}.$$

En d'autres termes, l'ensemble des solutions de (S) est:

$$\{(4 - x_3, 3 - 2x_3, x_3, 5),\ x_3 \in \mathbb{K}\}.$$

Exemple II.17. Supposons que le système a pour matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{array}\right]$$

Cette matrice est sous forme échelonnée (non réduite). Le 2 en bas à droite est un élément de tête situé sur la dernière colonne: le système n'a pas de solution, car la dernière ligne se lit $0 = 2$.

Exemple II.18. Supposons que le système a pour matrice augmentée:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Cette matrice est sous forme échelonnée réduite, et le système est compatible. Les variables de base sont x_1 et x_3, et les variables libres x_2 et x_4. L'ensemble des solutions est

$$\Big\{ (4 - 2x_2 + x_4, x_2, -5 - 2x_4, x_4),\ (x_2, x_4) \in \mathbb{K}^2 \Big\}.$$

Exercice II.19. Dire si les systèmes de l'exercice II.12, lorsqu'ils sont sous forme échelonnée réduite, sont compatible. Donner alors une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

La proposition suivante découle immédiatement des observations précédentes:

Proposition II.20. *Soit (S) un système* compatible *dont la matrice augmentée est sous forme échelonnée réduite. Alors le nombre de variables libres est égal à la différence du nombre d'inconnues et du nombre de lignes non nulle.*

En d'autres termes, si le système est sous forme échelonnée réduite, on a:

$$\text{nombre d'inconnues} - \text{nombre d'équations} = \text{nombre de degrés de liberté}$$

Exercice II.21. Dire si chacune des matrices suivantes est sous forme échelonnée (respectivement sous forme échelonné réduite). Le système dont c'est la matrice augmentée est-il compatible? Si c'est le cas, donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

$$\text{a)}\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \text{b)}\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right], \quad \text{c)}\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

C. Méthode du pivot de Gauss. Nous venons de voir qu'un système linéaire dont la matrice augmentée est sous forme échelonnée réduite peut être résolu très facilement. Nous allons maintenant montrer que toute matrice peut être mise sous cette forme par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes. On utilise une méthode appelée *méthode du pivot* ou *du pivot de Gauss*, qui suit exactement la stratégie ébauchée au Chapitre I (cf §B.3 et §D). Le nom de cette méthode est un hommage au mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mais elle était déjà connue des mathématiciens chinois du 1er siècle de notre ère. D'après Wikipedia "Elle est référencée dans l'important livre chinois *Jiuzhang suanshu* ou *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*, dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre *Fang cheng* (la disposition rectangulaire)".

Soit A une matrice (m, p) (m lignes, p colonnes). On veut transformer A en une matrice échelonnée réduite par une série d'opérations élémentaires sur les lignes. La méthode est divisée en une phase de descente (permettant d'obtenir une matrice échelonnée qui n'est pas forcément réduite) et une phase de remontée. Pour illustrer cette méthode, on l'applique à la matrice

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Phase de descente. Cette phase est divisée en 4 étapes, que l'on doit éventuellement réaliser plusieurs fois.

Etape 1: choix du pivot. On appelle *colonne pivot* la première colonne non nulle[1]. On choisit sur cette colonne un élément non nul, appelé pivot. Dans notre exemple, la colonne pivot est la première colonne. On peut choisir comme élément pivot le 1 en haut à gauche (en gras).

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Etape 2. On échange la première ligne avec la ligne de l'élément pivot. Le pivot deviend ainsi l'élément de tête de la première ligne. Dans notre exemple, l'élément pivot est déjà situé sur la première ligne: cette étape ne modifie pas la matrice.

[1]c'est à dire la colonne la plus à gauche qui n'est pas composée uniquement de zéros

Etape 3. En ajoutant aux autres lignes un multiple adéquat de la première ligne, on annule tous les coefficients de la colonne pivot autre que le pivot. Dans notre exemple, cela donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle (L_2)-2(L_1)} \\ {\scriptstyle (L_3)-(L_1)} \end{array}.$$

Etape 4. Si la matrice obtenue est sous forme échelonnée, la phase de descente est terminée. Sinon, on applique les étapes 1 à 4 à la matrice à laquelle on a enlevé la première ligne.

Revenons à notre exemple. La matrice A a 3 lignes. On applique les étapes 1 à 4 à la matrice $A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array}\right]$ obtenue à partir de A en enlevant la première ligne. En pratique, on continue à écrire cette première ligne, que l'on ignore.

Étape 1': On considère donc la matrice $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & -6 & -4 \end{array}\right]$. La colonne pivot (première colonne non nulle lorsqu'on ignore la première ligne) est la deuxième colonne. On doit choisir comme pivot le -2, situé à la troisième ligne de cette colonne.

Étape 2': on échange la 2ème et la 3ème ligne, la matrice obtenue est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \mathbf{-2} & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{22}$$

Étape 3': les coefficients de la colonne pivot (la deuxième colonne) autre que le pivot sont déjà nuls, il n'y a donc rien à faire. Rappelons que l'on ignore la première ligne. Il n'y a donc que le coefficient situé à la troisième ligne de cette deuxième colonne à considérer. Ce coefficient est bien égal à zéro.

Étape 4': la matrice obtenue est échelonnée: on arrête ici la phase de descente.

Si A est une matrice échelonnée $m \times n$, et $(a_0, \dots, a_n)$ sont $n+1$ scalaires tels que $a_0 \neq 0$, la matrice

$$B = \left[\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$

(ou tout autre matrice obtenue à partir de B en rajoutant des colonnes de zéros à sa gauche) est aussi une matrice échelonnée $m \times (n+1)$. De cette remarque, et du fait que toute matrice ayant une seule ligne est échelonnée, on déduit que la phase de descente de la méthode du pivot aboutit bien, après un certain nombre[2] de passages par les étapes 1 à 4, à une matrice échelonnée.

Pour obtenir une matrice échelonnée réduite, on a besoin de deux étapes supplémentaires, qui constituent la phase de remontée.

Phase de remontée. Etape 5: cadrage. On multiplie chaque ligne non nulle par l'inverse de son élément de tête, de telle manière que l'élément de tête de la nouvelle ligne vaut 1. Dans notre exemple:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle -\frac{1}{2}(L_2)} \\ \\ \end{array}$$

Etape 6: on ajoute à chaque ligne un multiple de la dernière ligne non nulle, pour que la colonne au-dessus de l'élément de tête de la dernière ligne ne soit composée que de zéros. On répète cette

[2] au plus $m-1$

opération avec l'avant-dernière ligne, etc, jusqu'à la deuxième ligne. Sur notre exemple:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (L_1)-2(L_1) \\ \\ \\ \end{array}$$

Remarque II.22. On déduit de l'exemple donné une description paramétrique de l'ensemble des solutions du système:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 2x + 4y + 8z = 14 \\ x - 2z = 3 \end{cases}$$

dont la matrice augmentée est la matrice A. Le système est compatible: il n'y a pas d'élément de tête sur la dernière colonne de la matrice échelonnée réduite obtenue. Il y a deux variables de base, x et y, et une variable libre z. L'ensemble des solutions est donné par

$$\{(3 + 2z, 2 - 3z, z),\ z \in \mathbb{K}\}.$$

Remarquons que la compatibilité du système peut se vérifier à la fin de la phase de descente, sur la forme échelonnée non réduite (22).

Par construction, la matrice obtenue à l'issue de la phase de remontée est bien une matrice échelonnée réduite: on a transformé en 1 tous les éléments de tête, et en 0 tous les coefficients situés au dessus d'un élément de tête. On a montré:

Théorème II.23. *Soit A une matrice. Alors A peut-être transformée par des opérations élémentaires sur les lignes, en une matrice échelonnée réduite.*

On peut en fait démontrer l'unicité de la forme échelonnée réduite:

Théorème II.24. *Soit A et B deux matrices échelonnées réduites. Supposons que B puisse être obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes. Alors $A = B$.*

On omet la démonstration, cf par exemple [**Lay04**], annexe A.

Remarque II.25. Il y a plusieurs variantes (parfaitement équivalentes) de la méthode du pivot que nous venons de décrire. On peut par exemple échanger les étapes 5 et 6. On peut aussi réaliser l'étape de cadrage 5 pendant la phase de descente. Dans tous les cas il est important de n'utiliser que des opérations élémentaires sur les lignes (cf l'avertissement II.6). Mentionnons que les opérations élémentaires analogues sur les colonnes d'une matrice existent. Ces opérations n'ont pas d'interprétation immédiate en terme de systèmes linéaires et ne peuvent pas être utilisées dans le cadre du pivot de Gauss.

Remarque II.26. Nous avons décrit la méthode du pivot pour une matrice, il est possible de l'appliquer exactement de la même façon sur un système linéaire. On peut donc résoudre un système linéaire par la méthode du pivot directement ou en passant par la notation matricielle. Ces deux façons de faire sont bien sûr parfaitement équivalentes.

Récapitulons la méthode générale de résolution d'un système linéaire décrite dans ce chapitre:

- Appliquer la phase de descente de la méthode du pivot de Gauss à la matrice augmentée du système. On obtient une matrice échelonnée.
- Déterminer si le système est compatible: si la colonne de droite contient un élément de tête, le système n'est pas compatible (i.e. il n'y a pas de solution). Sinon il est compatible.
- Si le système est compatible, appliquer la phase de remontée du pivot de Gauss. On obtient une matrice échelonnée réduite.
- Encore dans le cas compatible, donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions à l'aide de la matrice échelonnée réduite obtenue.

Donnons un autre exemple. On considère le système:

$$(S)\left\{\begin{aligned} -x_1+3x_2+x_4&=-6\\ 2x_1-6x_2-2x_4&=12\\ x_1-3x_2+3x_3+6x_4&=1\\ -3x_1+9x_2+3x_3+9x_4&=-21\end{aligned}\right.$$

Appliquons la méthode du pivot à sa matrice augmentée:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & 3 & 0 & 1 & -6\\ 2 & -6 & 0 & -2 & 12\\ 1 & -3 & 3 & 6 & 1\\ -3 & 9 & 3 & 9 & -21\end{array}\right]$$

Phase de descente

Etape 1: choix du pivot. La colonne pivot est la première colonne. Le pivot est le -1 en gras.

Etape 2: la première ligne est déjà la ligne pivot.

Etape 3:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 7 & -5\\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3\end{array}\right]\quad\begin{array}{l} \\ (L_2)+2(L_1)\\ (L_3)+(L_1)\\ (L_4)-3(L_1)\end{array}$$

Etape 4: on repasse à l'étape 1 en ignorant la première ligne.

Etape 1': la colonne pivot est la troisième colonne. On choisit le 3 sur la quatrième ligne de cette colonne comme élèment pivot.

Etape 2': on échange la ligne pivot avec la deuxième ligne (i.e. la "première" ligne de la matrice constituée des trois dernières lignes)

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 7 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\quad\begin{array}{l} \\ (L_4)\\ \\ (L_2)\end{array}$$

Etape 3':

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\quad\begin{array}{l} \\ \\ (L_3)-(L_2)\\ \\ \end{array}$$

Etape 4': la matrice obtenue est échelonnée. La phase de descente est terminée. On remarque que la colonne de droite ne contient aucun élément de tête: le système est compatible. On passe à la phase de remontée pour obtenir une matrice échelonnée réduite.

Phase de remontée

Etape 5:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\quad\begin{array}{l} -(L_1)\\ \frac{1}{3}(L_2)\\ \\ \\ \end{array}$$

Etape 6: on utilise la ligne (L_3) pour annuler les éléments de la troisième colonne au-dessus de l'élément de tête:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\quad\begin{array}{l} (L_1)+(L_3)\\ (L_2)-2(L_3)\\ \\ \\ \end{array}$$

La matrice obtenue est sous forme échelonnée réduite. Il n'y a qu'une seule variable libre, x_2.

Une description paramétrique des solutions est donnée par:

$$\{(3x_2+4, x_2, 3, -2),\ x_2 \in \mathbb{K}\}.$$

III. Propriétés de l'ensemble des solutions

Considérons un système général à m équations et n inconnues:

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 & + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dans ce chapitre on décrit quelques propriétés importantes de l'ensemble des solutions $\mathcal{E}$ de ce système

A. Cas homogène: linéarité. On rappelle que le système (S) est *homogène* quand $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. En d'autres termes, le système est de la forme:

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

PROPOSITION III.1. *On considère le système homogène* (S) *avec* $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. *Alors*

(i) $(0, 0, \ldots, 0)$ *est solution de* (S)*: en particulier, un système homogène est toujours compatible.*
(ii) *Si* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *sont des solutions de* (S)*, alors* $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ *est une solution de* (S).
(iii) *Si* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $k \in \mathbb{K}$*, alors* $kx = (kx_1, \ldots, kx_n)$ *est une solution de* (S).

REMARQUE III.2. Nous verrons plus tard qu'un ensemble $\mathcal{E}$ vérifiant les trois propriétés ci-dessus est appelé "sous-espace vectoriel" de $\mathbb{K}^n$.

PREUVE DE LA PROPOSITION III.1. Les trois propriétés sont évidentes. Vérifions par exemple la propriété (ii). Si x et y sont solutions, on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0.$$

En sommant ces deux égalités, on obtient que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j) = 0,$$

ce qui signifie exactement que $x + y$ est solution de (S). □

D'après (i), un système homogène est donc toujours compatible. Plus précisément:

PROPOSITION III.3. *Soit* (H) *un système* homogène, sous forme échelonnée, *à* n *inconnues et* m *équations. Soit* m' *le nombre de lignes non nulles de ce système. Alors* $m' \leq n$. *De plus:*

(i) *Si* $m' = n$, 0 *est la seule solution de* (H).
(ii) *Si* $m' < n$*, le système a une infinité de solutions, admettant une description paramétrique avec* m' *variables de base et* $n - m'$ *variables libres.*

Démonstration. Par la phase de descente de la méthode du pivot de Gauss, on peut mettre le système (H) sous forme échelonnée réduite par des opérations élémentaires et ce, sans changer m' (ni, bien sûr m et n). On peut donc supposer que (H) est sous forme échelonnée réduite. La proposition est alors une reformulation de la proposition II.20. $\square$

Remarque III.4. Soit (H) un système homogène à m équations et n inconnues. Supposons $n > m$. Alors (H) a une infinité de solutions. En effet, on peut, par la méthode du pivot, mettre le système sous forme échelonnée. En utilisant les notations de la proposition III.3, on a $n > m \geq m'$, et, par la proposition III.3, le système a une infinité de solutions.

Exemple III.5. On peut affirmer sans aucun calcul que le système suivant a une infinité de solutions:

$$\begin{cases} 17x - iy + \sqrt{12}z = 0 \\ x + y + 14z = 0. \end{cases}$$

En effet, ce système est homogène, et a 3 inconnues pour seulement 2 équations.

Avertissement III.6. La remarque III.4 n'est plus valable dans le cas inhomogène. Par exemple, le système:

$$\begin{cases} 17x - iy + \sqrt{12}z = 0 \\ 17x - iy + \sqrt{12}z = 1 \end{cases}$$

(2 équations, 3 inconnues) n'a pas de solution.

B. Cas non-homogène. On considère le système général (S), sans supposer que les b_j sont tous nuls. On peut alors décrire les solutions de (S) à l'aide du système homogène (H) obtenu en annulant, dans (S), tous les b_j.

Proposition III.7. *Supposons que le système* (S) *est compatible. Soit* $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *une solution particulière de* (S). *Alors l'ensemble des solutions de* (S) *est donné par:*

$$\Big\{x^* + y, \quad y \text{ solution de (H)}\Big\}.$$

(La notation $x^* + y$ *est définie au point* (ii) *de la proposition III.1).*

Si (H) a une infinité de solutions, (S) a ou bien une infinité de solutions (et le nombre de paramètres permettant de décrire ces solutions est le même que pour (H)), ou bien aucune solution. Si (H) n'a que la solution nulle, (S) a une solution ou aucune solution. On ne peut pas dire sans connaître le second membre de (S), si le système (S) est compatible ou non sauf dans un cas particulier important, celui des systèmes de Cramer, que nous allons maintenant décrire.

C. Système de Cramer.

Proposition III.8. *Soit (S) un système linéaire de n équations à n inconnues. Supposons que (S) a une et une seule solution. Alors tout système obtenu à partir de (S) en changeant seulement le second membre a une seule solution.*

Définition III.9. Un système (S) vérifiant les hypothèses de la proposition III.8 est appelé *système de Cramer.*

Remarque III.10. Le fait d'être un système de Cramer ne dépend pas du second membre du système, mais seulement de ses coefficients.

Preuve de la proposition III.8. Par des opérations élémentaires sur les lignes, on peut, d'après la méthode du pivot de Gauss, se ramener à un système sous forme échelonnée réduite (S') ayant le même ensemble de solutions que (S). Soit m' le nombre de lignes non nulles de ce système. Le système étant compatible, le nombre de paramètres permettant de décrire l'ensemble des solutions est, d'après la proposition III.3, $n - m'$. Mais on ne peut pas avoir $n - m' \geq 1$, sinon l'ensemble des solutions serait infini. On a donc $n = m'$: la forme échelonnée réduite du système a n lignes non nulles, aucune ligne nulle, et s'écrit donc:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \\ \\ x_n = b'_n, \end{cases} \tag{23}$$

Lorsque l'on change le membre de droite du système (S) sans toucher au membre de gauche, on ne change que le membre de droite du système (23), puisque ce dernier est obtenu par des opérations élémentaires sur les lignes qui ne mélangent jamais le membre de gauche et le membre de droite des équations. Ceci montre que tout système obtenu à partir de (S) en ne changeant que le membre de droite n'a qu'une seule solution. □

Remarque III.11. De manière équivalente, on pourrait définir un système de Cramer comme un système à n équations et n inconnues qui a une forme échelonnée réduite du type (23).

Exercice III.12. Dire *avec le moins de calculs possibles* si les systèmes suivants ont une unique solution, pas de solution ou une infinité de solutions. On identifiera en particulier les systèmes homogènes et les systèmes de Cramer. Les systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) ont pour inconnues x, y et z. Les systèmes (S_4) et (S_5) x, y, z et t.

$$(S_1)\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+y+2z=-5 \\ x+3y+2z=2 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+3y+z=4 \\ x+y+2z=1 \\ x+3y+2z=3 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x+3y+z=-17 \\ x+y+2z=2 \\ x+3y+2z=5 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ x+y-z+5t=3 \\ 2x+y+2z+4t=1 \end{cases}, \quad (S_5) \quad x=2y+2t=3z+4(x+y)=6x+y+z+t.$$

IV. Réponse aux exercices

Exercice I.15: il y a une infinité de solutions. L'ensemble des solutions peut s'écrire

$$\{(x,x,3),\ x\in\mathbb{K}\}.$$

Exercice II.12

(i) Une matrice à une ligne est toujours sous forme échelonnée. Elle est sous forme échelonnée réduite si et seulement si son premier coefficient non nul vaut 1. L'équation (ou le "système" à une équation) correspondant est sous forme échelonnée réduite si et seulement si le coefficient de la première variable qui apparaît dans le système vaut 1.

(ii) La matrice du premier système est $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$, celle du deuxième système est $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$. Le premier n'est pas sous forme échelonnée. Le deuxième est sous forme échelonnée (non réduite). On peut donc tranformer, en échangeant l'ordre des variables, un système non-échelonné en un système échelonné.

(iii) échelonnée non réduite/ non échelonnée / échelonnée réduite.

(iv) échelonné réduit/ échelonné non réduit / non échelonné.

Exercice II.19

(ii) L'ensemble des solutions du deuxième système est donné par: $\Big\{(2-x_3, 3-x_3, x_3),\ x_3\in\mathbb{K}\Big\}$.

(iii) L'ensemble des solutions du système dont la matrice augmentée est la troisième matrice est donné par $\Big\{(x_1, x_2, 1-2x_5-3x_6, -2+3x_6, x_5, x_6),\ (x_1,x_2,x_5,x_6)\in\mathbb{K}^4\Big\}$.

(iv) Le système (S_1) a évidemment pour unique solution $(1, 2, 3)$.

Exercice II.21

La matrice a) est sous forme échelonnée. La dernière colonne ne contient pas d'élément de tête: le système est compatible. Pour décrire l'ensemble des solutions, ont peut facilement mettre la matrice sous forme échelonnée réduite (par le remplacement $(L_1) \leftarrow (L_1) + 2(L_2)$). On obtient la matrice (en omettant la dernière ligne, inutile, qui signifie $0 = 0$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Une description paramétrique de l'ensemble des solutions est donnée par:

$$\Big\{(4 - 2x_2 - 3x_3, x_2, x_3, 2),\ (x_2, x_3) \in \mathbb{K}^2\Big\}.$$

La matrice b) n'est pas sous forme échelonnée. La dernière ligne de cette matrice signifie $4 = 0$: le système n'est pas compatible.

La matrice c) est échelonnée réduite. L'ensemble des solutions est:

$$\Big\{(1 + 3x_4, 2 - 3x_4, -4x_4, x_4),\ x_4 \in \mathbb{K}\Big\}.$$

Exercice III.12

Par les remplacements $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$, on voit que le système (S_1) est équivalent au système

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ \quad -2y + z = -7 \\ \qquad\qquad z = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système est un système échelonné compatible à trois équations non nulles pour trois inconnues: c'est donc un système de Cramer, qui a une unique solution. De plus, par la Proposition III.8 sur les systèmes de Cramer, tout système obtenu à partir de (S_1) en ne changeant que le second membre sont aussi des systèmes de Cramer: on en déduit que (S_2) et (S_3) sont des systèmes de Cramer (et ont donc chacun une et une seule solution).

Le système (S_4) est un système homogène avec 3 équations et 4 inconnues. Il a donc une infinité de solutions. Le système (S_5) est équivalent à:

$$\begin{cases} x - (2y + 2t) = 0 \\ x - 3z - 4(x + y) = 0 \\ x - (6x + y + z + t) = 0 \end{cases}$$

C'est donc aussi un système homogène à 3 équations et 4 inconnues: il a une infinité de solutions.

Références

[Lay04] David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications*. troisième édition, 2004.