ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2017-2018

Exercice 1 (5.25pts)**.** Soit

$$\vec{u}_1 = (1,1,1), \quad \vec{u}_2 = (2,3,4), \quad \vec{u}_3 = (-1,-3,-4), \quad \vec{v} = (3,8,11)$$

et

$$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3).$$

a) (1) La famille $\mathcal{B}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est un espace vectoriel de dimension 3. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base, il suffit de vérifier que la matrice 3×3 formée des coefficients de ces vecteurs est inversible. Pour cela, on calcule son déterminant. Par l'opération sur les colonnes $(C_3) \leftarrow (C_3) + (C_2)$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la troisième colonne, on en déduit que ce déterminant vaut $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une base.

b) (1) Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$. Par définition, $x_1\vec{u}_1 + x_2)\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = (3,8,11)$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_3 - 3x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 & \\ x_2 - 2x_3 = 5 & (L_2) - (L_1) \\ 2x_2 - 3x_3 = 8 & (L_3) - (L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 & \\ x_2 - 2x_3 = 5 & \\ x_3 = -2 & (L_3) - 2(L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 & (L_1) + (L_3) \\ x_2 = 1 & (L_2) + 2(L_3) \\ x_3 = -2 & \end{cases}$$

$\iff (x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, -2).$

Date: lundi 7 mai 2018.

Les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$ sont donc $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

c) (1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(\vec{u}_1) = (3,8,11) = \vec{v}, \quad f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1, \quad f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

En utilisant la définition d'une matrice de représentation, et les coordonnées de $\vec{v}$ calculées à la question précédente on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) (0.5) On a :

$$g\big((x,y,z)\big) = \begin{matrix} (x-y+z, \\ -2x+4y-z, \\ -3x+5y-z) \end{matrix}$$

On lit les coordonnée de la matrice de représentation de g dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ sur cette formule :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(g) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

e) (0.75) On a

$$g(\vec{u}_1) = (1,1,1) = \vec{u}_1, \quad g(\vec{u}_2) = (3,4,5) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
$$g(\vec{u}_3) = (-2,-6,-8) = 2\vec{u}_3.$$

La matrice de représentation de g dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

f) (1) Par un résultat du cours, puis la définition du produit matriciel

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 (4pts)**.**

a) (1) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Par définition,

$$F + G = \{\vec{x} + \vec{y},\ \vec{x} \in F,\ \vec{y} \in G\}.$$

Par un résultat du cours,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Dans le suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, F désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x - 2y + z = 0\big\}$$

et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\Big((3, -1, -3), (2, 1, 1)\Big)$.

b) (1) L'espace vectoriel F est défini par une seule équation non nulle dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc un espace vectoriel de dimension $3 - 1 = 2$.

L'espace vectoriel G a pour famille génératrice $\Big((3, -1, -3), (2, 1, 1)\Big)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires : ils forment donc une famille libre, qui est une base de G. Donc G est également de dimension 2.

c) (1) Soit $\vec{x} \in F \cap G$. Puisque $\vec{x} \in G$, il existe des nombres réels λ et μ tels que

$$\vec{x} = \lambda(3, -1, -3) + \mu(2, 1, 1) = (3\lambda + 2\mu, -\lambda + \mu, -3\lambda + \mu).$$

Puisque $\vec{x} \in F$, ses coordonnées vérifient l'équation définissant F, ce qui s'écrit $3\lambda + 2\mu + 2\lambda - 2\mu - 3\lambda + \mu = 0$, ou encore $\mu = -2\lambda$. On a donc :

$$\vec{x} = \lambda(3, -1, -3) - 2\lambda(2, 1, 1) = \lambda(-1, -3, -5),$$

donc $\vec{x} \in \operatorname{vect}\big((-1, -3, -5)\big)$, ce qui montre $F \cap G \subset \operatorname{vect}\big((-1, -3, -5)\big)$. De plus, le vecteur $(-1, -3, -5)$ est bien un élément de F (il vérifie l'équation définissant F) et un élément de G, puisque

$$(-1, -3, -5) = (3, -1, -3) - 2(2, 1, 1).$$

Ceci montre $\operatorname{vect}\big((-1, -3, -5)\big) \subset F \cap G$. D'où :

$$\operatorname{vect}\big((-1, -3, -5)\big) = F \cap G.$$

d) (1) La dimension de $F \cap G$ est 1. Donc

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

L'espace vectoriel $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui a la même dimension que $\mathbb{R}^3$. C'est donc exactement $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (2pts)**.**

a) (1) Soit A et B deux matrices carrées de taille 4×4.

(i) Si $B = 2A$, alors $\det B = 2^4 \det A$.

(ii) Si B est obtenue à partir de A en échangeant les lignes 1 et 3, $\det B = -\det A$.

(iii) Si $B = A^2$, $\det B = (\det A)^2$.

(iv) Si B est obtenue à partir de A en multipliant la première colonne par 3 et la quatrième colonne par 2, $\det B = 2 \times 3 \times \det A = 6 \det A$.

b) (1) Par les opérations sur les colonnes $(C_2) \leftarrow (C_2) + (C_1)$, $(C_3) \leftarrow (C_3) + (C_1)$ et $(C_4) \leftarrow (C_4) + (C_1)$,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la troisième ligne, puis en utilisant la règle de Sarrus, on en déduit

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -(-2 - 4 + 7) = -1.$$

Exercice 4 (7pts)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et f une application linéaire de E dans F.

a) (1) Le noyau de f est

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \vec{x} \in E \text{ t.q. } f(\vec{x}) = \vec{0}_F \right\}.$$

L'image de f est

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f(\vec{x}) \ : \ \vec{x} \in E \right\}.$$

b) (1) On a :

$$\vec{0}_F = f(\vec{0}_E) \in \operatorname{Im} f.$$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments de $\operatorname{Im} f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition de $\operatorname{Im} f$, il existe deux éléments $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E tels que

$$\vec{u} = f(\vec{x}) \text{ et } \vec{v} = f(\vec{y}).$$

Donc (en utilisant la linéarité de f),

$$\vec{u} + \vec{v} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) \in \operatorname{Im} f.$$

De même,

$$\lambda \vec{u} = \lambda f(\vec{x}) = f(\lambda \vec{x}) \in \operatorname{Im} f.$$

On a bien montré que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

c) (1.25) Supposons f injective. Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$. L'application f étant linéaire, on sait que $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, et donc $\{\vec{0}_E\} \subset \operatorname{Ker} f$. De plus, par définition de $\operatorname{Ker} f$,

$$f(\vec{x}) = \vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$$

et donc, en utilisant l'injectivité de f, $\vec{x} = \vec{0}_E$. Donc $\operatorname{Ker} f \subset \{\vec{0}_E\}$ et on a bien montré $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$.

On suppose maintenant $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des éléments de E tels que $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$. Alors

$$\vec{0}_F = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}),$$

ce qui montre $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker} f$, et par notre hypothèse sur $\operatorname{Ker} f$, $\vec{x} = \vec{y}$, montrant l'injectivité de f.

d) (0.5) La relation demandée (théorème du rang) est

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

e) (0.75) Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une base du noyau de f et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q)$ une base de l'image de f. Par définition de l'image de f, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$, il existe $\vec{w}_k \in E$ tel que $f(\vec{w}_k) = \vec{v}_k$. Soit $\mathcal{D} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q\}$. On montre que c'est une base de E, ce qui implique que la dimension de E est $p+q$, soit la relation de la question précédente.

On suppose dans les questions suivantes que $E = F$. L'application linéaire f est donc un endomorphisme de E.

f) (1) Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f \circ f(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E$, et donc $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f \circ f)$. On a montré comme demandé

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f \circ f).$$

Soit maintenant $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f \circ f)$. Il existe donc $\vec{z} \in E$ tel que $\vec{y} = f \circ f(\vec{z}) = f(f(\vec{z}))$, ce qui montre $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$ (c'est l'image du vecteur $f(\vec{z})$ par f).

g) (0.75) On suppose que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker}(f \circ f)$. On va utiliser que si H est un espace vectoriel, et G est un sous-espace vectoriel de H de même dimension, alors $G = H$.

Puisque $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f \circ f)$ par la question précédente, l'égalité des dimensions implique immédiatement $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f \circ f)$. Par la relation de la question d), appliquée à f et à $f \circ f$, on a :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker}(f \circ f) = \dim \operatorname{Im}(f \circ f),$$

et, puisque $\operatorname{Im}(f \circ f) \subset \operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ f).$$

h) (0.75) On suppose encore que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker}(f \circ f)$. Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Alors par définition de $\operatorname{Im} f$, il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\vec{x} = f(\vec{y})$. Puisque $\vec{x}$ est un élément du noyau de f, on a donc $\vec{0}_E = f(\vec{x}) = f \circ f(\vec{y})$, ce qui signifie que $\vec{y}$ est un élément de $\operatorname{Ker} f \circ f$. Par la question précédente, $\vec{y} \in \operatorname{Ker} f$. En d'autres termes, $\vec{x} = f(\vec{y}) = \vec{0}_E$. On a montré

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}_E\}.$$

Par la relation sur les dimensions rappelés à la question d), $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 5 (Algorithmique, 3pts)**.**

a) Une solution :

```
int* transpose(int* M, int n)
{
 int* T=malloc(n*n*sizeof(int));
 for(int i=0;i<n;i++)
  for(int j=0;j<n;j++)
   T[i*n+j]=M[j*n+i];
 return T;
}
```

b) Le produit est la matrice identité.

c) Pour multiplier deux matrices A et B de taille $n \times n$, il suffit de former la matrice $3n \times 3n$ à gauche du produit demandé à la question précédente, de calculer son inverse gràce à l'algorithme donné, et de renvoyer la sous-matrice de taille $n \times n$ en haut à droite. L'unicité de l'inverse et le calcul précédent assure que cette sous-matrice est bien le produit AB. Former la matrice $3n \times 3n$ et extraire la sous-matrice $n \times n$ se fait en temps $O(n^2)$, et le calcul de l'inverse se fait en temps $O((3n)^{2{,}018}) = O(n^{2{,}018})$. D'où un temps total en $O(n^{2{,}018})$.

Morale : multiplier n'est pas plus difficile qu'inverser (le contraire est aussi vrai, ce qui est plus étonnant et plus difficile à montrer).

d) Si $b(n)$ est le nombre d'étoiles affichée par un appel à `blup(n)`, alors

$$\begin{array}{rcl} b(2^p) & = & 3b(2^{p-1}) + 1 \\ & = & 3[3b(2^{p-2}) + 1] + 1 \\ & = & 3^2 b(2^{p-2}) + 3 + 1 \\ & = & \ldots \\ & = & 3^p b(2^0) + 3^{p-1} + \ldots + 1 \\ & = & 3^{p+1} + \dfrac{1}{2}(3^p - 1). \end{array}$$

On calcule alors $b(8) = b(2^3) = 3^4 + \frac{3^3-1}{2} = 81 + \frac{27-1}{2} = 81 + 13 = 94$.