ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2017-2018

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barème est donné à titre indicatif.

L'exercice d'algorithmique doit être traité sur une feuille à part.

Exercice 1 (5pts)**.** Soit

$$\vec{u}_1 = (1,1,1), \quad \vec{u}_2 = (2,3,4), \quad \vec{u}_3 = (-1,-3,-4), \quad \vec{v} = (3,8,11)$$

et

$$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3).$$

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$.
c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(\vec{u}_1) = (3,8,11), \quad f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1, \quad f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

Déterminer la matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$ (c'est à dire avec $\mathcal{B}$ comme base de départ et comme base d'arrivée).
d) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$g\big((x,y,z)\big) = (x - y + z, -2x + 4y - z, -3x + 5y - z).$$

Déterminer la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
e) Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.
f) Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (4pts)**.**
a) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler la définition de $F + G$. Rappeler une relation entre les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

Dans le suite de cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, F désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$F = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ x - 2y + z = 0\Big\}$$

et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\Big((3,-1,-3),(2,1,1)\Big)$.

Date: lundi 7 mai 2018.

b) Déterminer avec le moins de calcul possible (mais en justifiant rigoureusement) les dimensions de F et de G.

c) Déterminer une base de $F \cap G$.

d) Déterminer $F + G$. On commencera par calculer sa dimension.

Exercice 3 (2pts)**.**

a) Soit A et B deux matrices carrées de taille 4×4. Exprimer le déterminant de B en fonction de celui de A dans les cas suivants :

(i) $B = 2A$.

(ii) B est obtenue à partir de A en échangeant les lignes 1 et 3.

(iii) $B = A^2$.

(iv) B est obtenue à partir de A en multipliant la première colonne par 3 et la quatrième colonne par 2.

b) Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 (7pts)**.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et f une application linéaire de E dans F.

Les 5 premières questions de cet exercice sont des questions de cours.

a) Rappeler la définition du noyau et la définition de l'image de f.

b) Montrer que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

c) Montrer que f est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{\vec{0}_E\}$.

d) Rappeler une relation entre la dimension du noyau de f, la dimension de l'image de f et la dimension de E ou de F.

e) Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une base du noyau de f et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q)$ une base de l'image de f. Construire (comme dans la démonstration du cours de la relation que vous avez rappelée à la question précédente) une base $\mathcal{D}$ de E à partir des familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On ne demande pas de montrer que $\mathcal{D}$ est une base.

On suppose dans les questions suivantes que $E = F$. L'application linéaire f est donc un endomorphisme de E.

f) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f \circ f)$. Montrer de même une relation d'inclusion entre l'image $\operatorname{Im} f$ de f et l'image de $f \circ f$.

g) On suppose que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker}(f \circ f)$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f \circ f)$ puis que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ f)$.

h) On suppose encore que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker}(f \circ f)$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 5 (Algorithmique, 3pts)**.** Faire cet exercice sur une feuille séparée et la rendre à part.

a) Écrire en `C` une fonction qui prend en argument une matrice entière carrée et renvoie la matrice transposée (les matrices sont allouées dynamiquement comme en TD/TP).

b) Pour deux réels a et b, calculer le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que le résultat reste vrai si a et b sont remplacés par des matrices A et B de taille $n \times n$, 1 par la matrice identité $n \times n$ et 0 par la matrice nulle $n \times n$ (il s'agit alors de produits par blocs, comme dans le TD/TP sur l'algorithme de Strassen).

c) On vous donne un algorithme qui, pour tout n, inverse une matrice de taille $n \times n$ en temps $O(n^{2,018})$. En déduire un algorithme qui multiplie deux matrices $n \times n$ en temps $O(n^{2,018})$.

d) Combien d'étoiles affiche un appel à `blup(8)` (la réponse sera justifiée) ?

```
void blup(int n)
{
 if(n==1)
  printf("***");
 else
  {
   printf("*");
   blup(n/2);
   blup(n/2);
   blup(n/2);
  }
}
```