ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2018-2019

Durée : 2 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Questions de cours, 2 + 1,5 + 1 pts)**.**

a) Soit A une matrice $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$. Donner la définition de "A est inversible". Donner 2 conditions nécessaires et suffisantes différentes (mentionnées dans le chapitre 3 du cours) pour que A soit inversible. On ne demande pas la démonstration de l'équivalence de ces conditions.

Dans les questions suivantes on se donne des entiers naturels non nuls p, q et r. Soit $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ une matrice $p \times q$ et $B = [b_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}}$ une matrice $q \times r$.

b) Justifier que le produit matriciel AB est bien défini. On note $D = [d_{i,j}]_{i,j}$ ce produit. Quelle est la taille de D ? Exprimer les coefficients $d_{i,j}$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

c) On suppose $p = 2$, $q = r = 3$, $s = 4$ et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exprimer la matrice $D = AB$ en fonction des coefficients $b_{i,j}$.

Exercice 2 (3 + 1 + 2 pts)**.**

a) Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x, y et z, en distinguant selon les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 6 \\ 3x + 4y + 5z = 8 \\ 4x + 5y + \lambda z = 10. \end{cases}$$

b) A quelle condition sur λ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Justifier. **T.S.V.P.**

Date: Mardi 19 février 2019.

c) Inverser la matrice A pour $\lambda = 5$, c.-à-d., la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$
par la méthode du pivot de Gauß.

Exercice 3 (2 + 1,5 pts)**.**
a) Donner les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P = X^4 - 4X^3 + 8X^2$ et leurs ordres de multiplicité.
b) Soit $B = X^2+4$. Effectuer la division euclidienne de P par B. On donnera le quotient et le reste de cette division euclidienne.

Exercice 4 (1,5 + 1 + 1,5 pts)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
a) Pour un sous-ensemble F de E, donner la définition de "F est un sous-espace vectoriel de E".

On justifiera rigoureusement les deux questions suivantes, en utilisant la définition donnée à la question a).
b) On suppose $E = \mathbb{K}^3$. L'ensemble
$$\{(s, s+t, s) \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\},$$
est-il un sous-espace vectoriel de E ?
c) On suppose $E = \mathbb{K}^3$. L'ensemble
$$\{(s, s+t, s^2) \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\},$$
est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 5 (Exercice d'algorithmique, 3 pts)**.** Faire cet exercice sur une feuille séparée et la rendre à part. Les matrices seront allouées dynamiquement comme en TD/TP.
a) Écrire une fonction qui renvoie la matrice $n \times n$ dont les coefficients au-dessus de la diagonale valent 1 et les autres sont nuls.
b) Écrire une fonction qui renvoie 0 si la somme des coefficients d'une matrice donnée est égale à zéro, 1 sinon.
c) Donner la complexité asymptotique des deux fonctions précédentes.