ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°1

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2018-2019

Exercice 1 (Questions de cours, 2 + 1,5 + 1 pts).
a) Soit A une matrice $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$. La matrice A est inversible quand il existe des matrices B et C de taille $n \times n$, à coefficients dans $\mathbb{K}$, telles que

$$AB = CA = I_n.$$

N'importe laquelle des deux conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilité de A convenaient :

(i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0_{n\times 1} \Longrightarrow X = 0_{n\times 1}$;
(ii) $\forall Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}), \quad YA = 0_{1\times n} \Longrightarrow Y = 0_{1\times n}$;
(iii) A est inversible à gauche : $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ CA = I_n$;
(iv) A est inversible à droite : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n$;
(v) ${}^tA$ est inversible ;
(vi) le système linéaire $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un système de Cramer.

Dans les questions suivantes on se donne des entiers naturels non nuls p, q et r. Soit $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ une matrice $p \times q$ et $B = [b_{i,j}]_{\substack{1\le i\le q\\ 1\le j\le r}}$ une matrice $q \times r$.

b) Le produit matriciel AB est bien défini parce que le nombre de q de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B.

Soit $D = [d_{i,j}]_{i,j} = AB$. La matrice D est de taille $p \times r$. D'après le cours

$$\forall i \in \{1,\dots,p\},\ \forall j \in \{1,\dots,r\}, \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}.$$

c) On suppose $p = 2$, $q = r = 3$ et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A peut s'écrire

$$A = [\delta_{i+1,j}]_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 3}}$$

Par la formule donnée à la question précédente, pour $1 \le i \le 2$, $1 \le j \le 3$,

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} \delta_{i+1,k} b_{k,j} = b_{i+1,j},$$

Date: Mardi 19 février 2019.

ou encore
$$D = [b_{i+1,j}]_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}} = \begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (3 + 1 + 2 pts)**.**

a) On considère le système suivant, d'inconnues réelles x, y et z :
$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 6 \\ 3x + 4y + 5z = 8 \\ 4x + 5y + \lambda z = 10, \end{cases}$$
où λ est un paramètre réelle. La matrice augmentée du système est
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & \lambda & 10 \end{array}\right).$$
On met cette matrice sous forme échelonnée par la méthode du Pivot de Gauss :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 8 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (L_2) - \frac{3}{2}(L_1) \\ (L_3) - 2(L_1) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (L_3) - 2(L_2) \end{array}$$

La matrice obtenue est échelonnée. On distingue deux cas, selon la valeur du coefficient $\lambda - 6$ apparaissant sur la dernière ligne.

Premier cas : $\lambda \neq 6$ La dernière ligne est non nulle et son élément de tête est $\lambda - 6$. Il n'y a aucun élément de tête sur la dernière colonne. Le système est donc compatible. On termine la résolution en mettant la matrice sous forme échelonnée réduite par la phase de remontée de la méthode du pivot.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{2}(L_1) \\ -2(L_2) \\ \frac{1}{\lambda-6}(L_3) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) - 2(L_3) \\ (L_2) - 2(L_3) \\ \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) - \frac{3}{2}(L_2) \\ \\ \\ \end{array}$$
Le système a pour unique solution $(0, 2, 0)$.

Deuxième cas : $\lambda = 6$. La dernière ligne est nulle. Il n'y a aucun élément de tête sur la dernière colonne. Le système est donc compatible. On utilise à nouveau la phase de remontée du pivot de Gauss.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{2}(L_1) \\ -2(L_2) \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) - \frac{3}{2}(L_2) \\ \\ \\ \end{array}$$
L'ensemble des solutions est
$$\Big\{(t, 2 - 2t, t),\ t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

est la matrice des coefficients du système (S), qui a autant d'inconnues que d'équation. D'après le cours, cette matrice est inversible si et seulement si le système (S) est un système de Cramer, c'est à dire si ce système a une unique solution. On déduit donc de la question précédente que la matrice A est inversible si et seulement si $\lambda \neq 6$.

c) D'après la question précédente, lorsque $\lambda = 5$, la matrice A est inversible. On calcule son inverse par la méthode du pivot de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (L_2) - \frac{3}{2}(L_1) \\ (L_3) - 2(L_1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (L_3) - 2(L_2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{2}(L_1) \\ -2(L_2) \\ -(L_3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) - 2(L_3) \\ (L_2) - 2(L_3) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) - \frac{3}{2}(L_2) \\ \\ \\ \end{array}$$

L'inverse de la matrice A lorsque $\lambda = 5$ est la matrice $\begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (2 + 1,5 pts)**.**

a) Soit $P = X^4 - 4X^3 + 8X^2$. On a :

$$P = X^2(X^2 - 4X + 8).$$

Le trinôme du second degré $T = X^2 - 4X + 8$ a pour discriminant $\Delta = -16 \neq 0$. Puisque $(4i)^2 = -16$, les racines de T sont $\frac{4+4i}{2} = 2 + 2i$ et $\frac{4-4i}{2} = 2 - 2i$. On a donc :

$$P = X^2\big(X - (2 + 2i)\big)\big(X - (2 - 2i)\big).$$

Le polynôme P a 0 pour racine double, et $2+2i$ et $2-2i$ pour racines simples.

b) Soit $B = X^2 + 4$.

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
X^4 & - & 4X^3 & + & 8X^2 & & & & & X^2+4 \\
\cline{1-9}\cline{10-10}
-X^4 & & & & -4X^2 & & & & & X^2-4X+4 \\
\cline{1-9}
 & & -4X^3 & + & 4X^2 & & & & & \\
 & & 4X^3 & + & & & 16X & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & 4X^2 & + & 16X & & & \\
 & & & & -4X^2 & & & - & 16 & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & 16X & - & 16 &
\end{array}
$$

Le quotient de la division euclidienne de P par B est donc $X^2 - 4X + 4$ et le reste $16X - 16$.

Exercice 4 (1,5 + 1 + 1,5 pts)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

a) Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire de E est un espace vectoriel. De manière équivalente, [1] les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\vec{0}_E \in F$.

(ii) $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in F \Longrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$.

(iii) $\vec{x} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda\vec{x} \in F$.

b) On suppose $E = \mathbb{K}^3$. Soit

$$G = \{(s, s+t, s) \in E, s, t \in \mathbb{K}\}.$$

Le vecteur nul de E, $(0,0,0)$, s'écrit $(0, 0+0, 0)$. C'est donc un élément de G.

Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de G. Il existe donc des éléments s, t, u et v de $\mathbb{K}$ tels que

$$\vec{x} = (s, s+t, s) \text{ et } \vec{y} = (u, u+v, u).$$

On a

$$\vec{x} + \vec{y} = (s+u, s+u+(t+v), s+u),$$

qui s'écrit $(s', s'+t', s')$ avec $s' = s+u$ et $t' = t+v$. Donc $\vec{x} + \vec{y} \in G$.

De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{x} = (\lambda s, \lambda s + \lambda t, \lambda s)$ qui est aussi un élément de G. On a bien montré que les critères (i), (ii) et (iii) de la question précédente sont vérifiés, et donc que G est un sous-espace vectoriel.

c) Soit

$$H = \{(s, s+t, s^2) \in E, s, t \in \mathbb{K}\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et $\vec{x}$ l'élement de H : $(1,1,1)$. On a

$$\lambda\vec{x} = (\lambda, \lambda, \lambda).$$

Donc $\lambda\vec{x}$ est un élément de H si et seulement si

$$\lambda = \lambda^2,$$

donc si et seulement si $\lambda(\lambda - 1) = 0$, i.e. $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. On en déduit que si il existe un élément de $\mathbb{K}$ qui est différent de 0 et de 1, H n'est pas un sous-espace vectoriel.

1. Les deux formulations étaient acceptées

Si $\mathbb{K}$ est le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, on a

$$H = \{(0,0,0), (1,1,1), (0,1,0), (1,0,1)\},$$

dont on vérifie facilement (en utilisant notamment la règle de calcul $1+1 = 0$) que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{F}_2)^3$.

Finalement, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ si et seulement si $\mathbb{K}$ est le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$.

On remarque que quand $\mathbb{K}$ est un des corps considéré dans les exemples du cours ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), H n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

Exercice 5 (Exercice d'algorithmique, 3 pts)**.**

a) Écrire une fonction qui renvoie la matrice $n \times n$ dont les coefficients au-dessus de la diagonale valent 1 et les autres sont nuls.

```
float* superieure(int n)
{
 float* M=malloc(n*n*sizeof(float));
 for(int i=0;i<n;i++)
  for(int j=0;j<n;j++)
   if (i<=j)
    M[i*n+j]=1;
   else
    M[i*n+j]=0;
 return M;
}
```

b) Écrire une fonction qui renvoie 0 si la somme des coefficients d'une matrice donnée est égale à zéro, 1 sinon.

```
int somme_nulle(float* M,int p, int q)
{
 float somme=0;
 for(int i=0;i<p;i++)
  for(int j=0;j<q;j++)
   somme=somme+M[i*q+j];
 if (somme==0)
  return 0;
 else
  return 1;
}
```

c) Chaque fonction fait deux boucles `for` imbriqué, donc une complexité $O(n^2)$ pour la première et $O(p \times q)$ pour la deuxième.