ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGORITHMIQUE
PARTIEL N°2

INSTITUT GALILÉE.
L1, 2ÈME SEMESTRE, ANNÉE 2018-2019

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués. Le barème est donné à titre indicatif.

L'exercice d'algorithmique doit être traité sur une feuille à part.

Exercice 1 (0,5 + 0,5 + 0,5 + 1 pts)**.** On définit une application

$$f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4 \ , \ (x, y, z) \mapsto (x - y - z, y - z, -x + 2z, 2x - y - 3z) \ .$$

a) Indiquer brièvement pourquoi f est une application linéaire.

b) Déterminer le noyau de f. Quelle est sa dimension ?

c) Déterminer le rang de f.

d) Déterminer une base de l'image de f.

Exercice 2 (1,5 + 1 + 1 + 0,5 pts)**.** Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$$G = \text{vect}\left((1, -1, 0); (2, 0, 3)\right) .$$

a) A quelle condition sur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ le système

$$a(1, -1, 0) + b(2, 0, 3) = (x, y, z),$$

d'inconnues réelles a et b, est-il compatible ? En déduire une description cartésienne de G.

b) Soit $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x + 2y - z = 0\right\}$. Justifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner la dimension et une base de H.

c) Déterminer la dimension et une base de $G \cap H$.

d) Déterminer $G + H$.

Exercice 3 (0,5 + 0,5 + 1 + 1 + 1 + 3 pts)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, et $f : E \to F$ une application.

Les quatre premières questions de cet exercice sont des questions de cours.

a) Que veut dire "f est une application linéaire" ?

b) Que veut dire "f est un automorphisme" ?

c) On suppose que f est une application linéaire, et que E et F sont de dimension finie. On note $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$, où n est la dimension de E. Rappeler la définition de la matrice de représentation $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

T.S.V.P.

Date: Mardi 16 avril 2019.

d) On suppose que f est un automorphisme, et que E est de dimension finie. Quel est le lien entre $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1})$? La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est-elle inversible ?

On suppose dans les deux questions suivantes que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que $E = \mathbb{C}^3$, que $\mathcal{B}$ est la base canonique de E, et que $f : E \to E$ est l'application

$$(x, y, z) \mapsto (-2x, -(3+i)x + y + iz, -(3-i)x - iy + z) \ .$$

On admet que f est une application linéaire.

e) On définit $\widetilde{\mathcal{B}} := \big((0,1,i), (0,i,1), (1,1,1)\big)$. Prouver que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une base de E.

f) Déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{B}}}(f)$, et $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{B}}}(f \circ f)$.

Exercice 4 (1 + 1 + 0,5 + 1 pts)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \geq 1$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice satisfaisant la relation $A^2 = A$.

a) Montrer que $\det(A) \in \{0, 1\}$.

b) Montrer que si $\det(A) = 1$, alors $A = I_n$.

c) Montrer que si $\det(A) = 0$, alors il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = 0$.

d) Pour $n = 2$, trouver $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ avec $A^2 = A$ et $A \notin \{0_2, I_2\}$.

Exercice 5 (Exercice d'algorithmique, 4 pts)**. Faire cet exercice sur une feuille séparée et la rendre à part.**

Soit M la matrice à coefficients positifs ci-dessous. Le coefficient en ligne i et colonne j est noté $M_{i,j}$. Un *chemin* est une suite de coefficients de M, chacun étant soit juste à droite soit juste en dessous du précédent. Le *poids* d'un chemin est la somme de ses coefficients. Par exemple, les coefficients d'un chemin de poids 33 sont ici soulignés :

$$M = \begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{6} & 7 & 5 \\ 5 & \underline{6} & 2 & 9 \\ 2 & \underline{7} & \underline{0} & \underline{9} \\ 6 & 0 & 6 & \underline{2} \end{pmatrix}$$

Le but est de trouver un chemin de poids minimal allant de $M_{1,1}$ à $M_{4,4}$. Soit $Q_{i,j}$ le poids minimal d'un chemin allant de $M_{1,1}$ à $M_{i,j}$.

a) Quelle relation vérifient $Q_{i,j}$, $Q_{i-1,j}$ et $Q_{i,j-1}$ pour $i > 1$ et $j > 1$?

b) Calculer la matrice 4×4 de coefficient $Q_{i,j}$ en ligne i et colonne j.

c) Quel est le poids minimal d'un chemin du premier au dernier coefficient ?

d) Trouver un chemin de poids minimal (le dessiner sur la matrice M).