L1 Université
2012-2013 Paris 13

Algèbre linéaire
Chapitre 2. Introduction aux matrices

Référence: Liret-Martinais [2], chapitre 4.

Nous avons déjà rencontré des tableaux de nombres, ou matrices. Nous allons étudier ici ces matrices de manière plus systématique, en définissant notamment des opérations (additions, multiplications...) sur des ensembles de matrices. Les motivations de ce chapitre sont d'une part de mieux comprendre les systèmes linéaires, qui peuvent être vus comme des équations matricielles, d'autre part d'introduire des notions et des méthodes utile dans l'étude de l'algèbre linéaire proprement dite qui sera l'objet de la suite du cours.

Comme dans le chapitre précédent, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des scalaires.

I. Définitions. Opérations sur les matrices

A. **Définitions.**

Définition I.1. Soient m et n deux entiers ≥ 1. Une matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de nombre (c.à.d. d'éléments de $\mathbb{K}$) à m lignes et n colonnes, que l'on note:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ou $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, ou encore, quand il n'y a pas d'ambiguité sur m et n, $A = [a_{ij}]$. Les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont appelés *coefficients* (ou *éléments*) de A. Le coefficient a_{ij} est situé à la $i-$ème ligne et $j-$ième colonne (le premier indice indique toujours la ligne, le deuxième la colonne).

L'ensemble des matrices $m \times n$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou plus simplement $\mathcal{M}_{m,n}$. Lorsque $m = n$, on dit que la matrice est *carrée*. On note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{M}_n$) au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Exemples I.2. La *matrice nulle* de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. Elle est notée 0.

$\begin{bmatrix} 1 & i & -5 \\ 3 & 4 & 7+i \end{bmatrix}$ est une matrice complexe 2×3 (*attention ici i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$, ce n'est pas l'indice des lignes!*)

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 3,1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ est une matrice réelle 3×2.

Définition I.3. On dit que deux matrices *de même taille* $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont égales lorque tous leur coefficients sont égaux, i.e. $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = b_{i,j}$. On note alors $A = B$.

Exemples I.4. Les matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ne sont pas égales.

Les matrices $[2i + j]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ et $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ sont égales.

Définition I.5. Une *matrice colonne* (ou un vecteur colonne) à m coefficients est un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$. On identifie $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^m$ en identifiant le vecteur colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ au m-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Une *matrice ligne* (ou un vecteur ligne) à n coefficients est un éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

La j-ième colonne de la matrice $[a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ est la matrice colonne $\begin{bmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}$, sa i-ème ligne la matrice ligne $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\end{bmatrix}$.

B. **Multiplication par un scalaire et additions.** On définit maintenant deux opérations qui se font *coefficient par coefficient*.

Définition I.6. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Le produit de A par λ, noté λA, est la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ: si A est la matrice $[a_{ij}]$, λA est la matrice $[\lambda a_{ij}]$.

Définition I.7. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ deux matrices. La somme de A et B, notée $A+B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}$ obtenue en sommant les coefficients de A et de B deux à deux: si $A=[a_{ij}]$ et $B=[b_{ij}]$, $A+B$ est la matrice $[a_{ij}+b_{ij}]$.

Avertissement I.8. La somme de deux matrices n'est définie que si ces matrices sont *de même taille*.

Exemples I.9.

$$17\begin{bmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -34\\ 0 & 17\end{bmatrix},\qquad (3+i)\begin{bmatrix}1 & 3-i\\ i & -1\\ 0 & -i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+i & 10\\ 3i-1 & -3-i\\ 0 & 1-3i\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 7\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 0 & 5\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 7\\ 2 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\text{ n'est pas définie.}$$

$$[i+j]_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}+[2i-j]_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}=[3i]_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}.$$

Les propriétés suivantes découlent immédiatement des propriétés (commutativité, associativité, distributivité) de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{K}$.

Proposition I.10. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

(i) *(commutativité) $A+B=B+A$.*
(ii) *(associativité) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (on note leur valeur commune $A+B+C$).*
(iii) *$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.*
(iv) *$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.*
(v) *$0+A=A$.*
(vi) *$A+(-1)A=0$.*

Exercice I.11. Démontrer les propriétés de la proposition.

Notation I.12. On note $-A$ la matrice $(-1)A$ et $A-B$ la somme $A+(-B)$.

C. **Transposition.**

Définition I.13. La transposée de la matrice $A=[a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice $[a_{ji}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On la note ${}^tA$. Les coefficients de la i-ème ligne de ${}^tA$ sont ceux de la i-ème colonne de A, et inversement, les coefficients de la j-ème colonne de ${}^tA$ sont ceux de la j-ème ligne de A.

On rencontre parfois la notation A^T au lieu de ${}^tA$.

Avertissement I.14. Lorsqu'on transpose une matrice, on inverse le nombre de lignes et le nombre de colonnes. Par exemple, la transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et la transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne.

Exemples I.15.

$${}^t\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 4 & 5\end{bmatrix},\qquad {}^t\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}\qquad {}^t\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}.$$

Le dernier exemple de matrice A est une matrice carrée qui vérifie $A={}^tA$: on dit que A est *symétrique*.

On déduit immédiatement de la définition de la transposée:

Proposition I.16. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

$${}^t({}^tA)=A,\qquad {}^t(A+B)={}^tA+{}^tB,\qquad {}^t(\lambda A)=\lambda\,{}^tA.$$

D. **Multiplication des matrices.** La définition de la multiplication est plus délicate que celle des opérations précédentes, et nous allons la diviser en deux étapes.

D.1. *Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne.*

Définition I.17. Soit $A = [a_i]_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ une matrice ligne et $B = [b_j]_{1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne *ayant le même nombre de coefficients*. Le produit AB de A et B est le scalaire:

$$AB = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Remarque I.18. Si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$, le produit scalaire de u et v, noté $u \cdot v$, est le produit

$${}^t uv = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Comme indiqué précédemment, on a identifié $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: v est donc une matrice colonne, ${}^t u$ une matrice ligne, et le produit ${}^t uv$ est bien défini.

Avertissement I.19. On ne peut pour l'instant multiplier qu'un vecteur ligne et un vecteur colonne *ayant le même nombre de coefficients*, et dans cet ordre.

Exemple I.20.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix} = -3 + 4i + 10 = 7 + 4i.$$

D.2. *Cas général.*

Définition I.21. Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices telles que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B. Le produit de A et B, noté AB ou $A \times B$ est la matrice dont le coefficient (i, j) est le produit (au sens de la définition I.17) de la i-ème ligne de A par la j-ième colonne de B.

Remarque I.22. On déduit immédiatement de la définition la formule suivante, dite formule du produit ligne colonne: si $AB = [c_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq p}}$, alors

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{1}$$

Avertissement I.23. La matrice AB n'est définie que lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Le nombre de lignes de AB est le nombre de lignes de A. Le nombre de colonnes de AB est le nombre de colonnes de B.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$(\underline{3}, \mathbf{4}) \qquad (\mathbf{4}, 2) \qquad (\underline{3}, 2).$$

Exemples I.24.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ n'est pas défini.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 & 2 \\ 6 & -15 & 0 & 4 \\ -9 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -21 & 3 \\ 8 & 4 & -28 & 4 \\ 10 & 5 & -35 & 5 \end{bmatrix}$$

En pratique, pour calculer le produit $[c_{ij}]$ de deux matrices A et B, on peut les disposer de telle manière que le coefficient c_{ij} à calculer soit aligné sur la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 & 2 \\ 6 & -15 & 0 & 4 \\ -9 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Soit n un entier ≥ 1. On note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la diagonale principale est composée de 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls:

$$I_n = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq n}} \quad a_{ii} = 1, \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0. \tag{2}$$

Exemple I.25.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition I.26. *Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors*

$$AI_n = I_m A = A.$$

Exercice I.27. Démontrer la proposition précédente à l'aide de la formule (1).

Définition I.28. La matrice I_n est appelée *matrice identité*.

On donne maintenant les propriétés de base de la multiplication matricielle:

Théorème I.29. *Soient A, B et C des matrices.*

(i) *Associativité: si $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}$,*

$$(AB)C = A(BC).$$

On note simplement ABC le produit des trois matrices.

(ii) *Distributivité à gauche: si $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}$,*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

(iii) *Distributivité à droite: si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}$,*

$$(A + B)C = AC + BC.$$

(iv) *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}$,*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

(v) *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}$,*

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

Démonstration. On démontre (i). Les preuves (plus simples) des autres propriétés sont laissées au lecteur. Remarquons que les matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ sont bien de même taille $m \times q$. On note

$$AB = [d_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq p}} \quad (AB)C = [e_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq q}} \quad BC = [f_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}} \text{ et } A(BC) = [g_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq q}}.$$

Notre but est de montrer

$$\forall i \in \{1, \dots, m\},\ \forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad e_{ij} = g_{ij}. \tag{3}$$

Par la formule (1),

$$d_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}, \qquad e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj}$$

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} c_{kj}, \qquad g_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} f_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \sum_{k=1}^{p} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj},$$

d'où (3). □

Exercice I.30. Refaire le calcul précédent lorsque $m = p = q = 2$, sans utiliser le symbole $\sum$.

Exercice I.31. Démontrer les propriétés (ii), (iii), (iv), (v) du théorème.

On termine cette partie par une mise en garde:

Avertissement I.32. Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Alors

$$ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 \quad \text{(régularité de la multiplication scalaire)} \tag{4}$$

$$ab = ba \quad \text{(commutativité de la multiplication scalaire).} \tag{5}$$

Les propriétés analogues pour la multiplication matricielle sont fausses en générale (sauf pour les matrices 1×1 qui sont des scalaires!) Par exemple:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E. **Systèmes linéaires et matrices.** La multiplication matricielle permet une nouvelle interprétation des systèmes linéaires. En effet, considérons un système linéaire à m équations et n inconnues:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \right. \tag{S}$$

Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice des coefficients de (S). On note

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Alors le système (S) est équivalent à l'équation matricielle:

$$AX = B.$$

Exemple I.33. Le système linéaire

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \quad -x_3 &= 1 \\ -x_1 \qquad\qquad +x_3 &= 5 \end{aligned} \right.$$

est équivalent à l'équation

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

F. **Formule du binôme.** On rappelle que si a, b sont deux nombres complexes et $n \geq 1$, on a la formule du binôme:

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

où les $\binom{n}{k}$ sont les coefficients du binôme:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Rappelons encore que ces coefficients du binôme vérifient la relation de récurrence:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \tag{6}$$

La formule du binôme reste vraie pour des matrices carrées, *lorsque ces matrices commutent.*

Proposition I.34. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que*
$$AB = BA.$$
Alors
$$(A+B)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}. \tag{7}$$

La démonstration, qui est exactement la même que dans le cas scalaire, est laissée au lecteur. On peut raisonner par récurrence sur n, en utilisant la formule (6).

Exercice I.35. Trouver deux matrices 2×2 A et B, qui ne commutent pas, et telles que la formule (7) soit fausse.

II. Matrices inversibles. Matrices élémentaires

Le but de cette section est l'étude des matrices carrées inversibles pour la multiplication matricielle, définies dans la partie A. Ces matrices inversibles ont plusieurs caractérisations équivalentes: pour le démontrer, on utilise, dans la partie B, plusieurs notions déjà vues au premier chapitre du cours, consacré aux systèmes linéaires. En B.1, on introduit des *matrices élémentaires* correspondant aux opérations élémentaires du chapitre 1. En B.2 on reparle de matrices échelonnées réduites, et en B.3 de la méthode du pivot de Gauss. Les matrices inversibles sont caractérisées en B.4, par le théorème II.32. Le B.5 est consacrée à l'interprétation matricielle des systèmes de Cramer.

Les deux points les plus importants de ce chapitre sont l'inversion de matrice par la méthode du pivot de Gauss et le théorème II.32.

A. **Définition et exemples de matrices inversibles.**

A.1. *Définition.*

Définition II.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *carrée*. La matrice A est dite *inversible* quand il existe des matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que
$$AB = CA = I_n,$$
où la matrice I_n est la matrice identité $n \times n$ définie en (2).

Exemple II.2. La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible. La matrice I_n est inversible ($I_n = I_n \times I_n$). La matrice $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ est inversible:
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Proposition II.3. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, il existe un unique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que*
$$AB = BA = I_n. \tag{8}$$
La matrice B est appelée inverse *de A, et notée A^{-1}. L'unicité signifie que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $MA = I_n$ ou $AM = I_n$, alors $M = A^{-1}$.*

En d'autres termes, si une matrice est inversible, l'inverse à gauche et l'inverse à droite de cette matrice sont égaux.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $AB = I_n$ et $CA = I_n$, alors $B = C$. La matrice B donnée par la définition II.1 vérifiera alors (8), et sera bien unique au sens donné par la proposition.

En multipliant à gauche l'égalité $AB = I_n$ par C, on obtient
$$\underbrace{CA}_{I_n} B = CI_n = C$$
et donc $B = C$ (on a utilisé l'associativité de la multiplication matricielle). □

Voici une propriété importante des matrices inversibles (cf l'avertissement I.32):

Proposition II.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors:*

(i) *Si $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$,*
$$MA = 0 \Longrightarrow M = 0.$$

(ii) *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,*
$$AM = 0 \Longrightarrow M = 0.$$

Remarque II.5. La proposition implique que si A est inversible, $(0,0,\dots,0)$ est l'unique solution du système homogène $AX=0$, $X\in\mathbb{K}^n$. En d'autres termes, ce système est un système de Cramer. De fait, l'unique solution de l'équation $AX=B$ est $X=A^{-1}B$.

Démonstration. Démontrons (i), la démonstration de (ii) est similaire. On suppose donc $MA=0$. En multipliant à droite par A^{-1}, on obtient

$$M\underbrace{A\,A^{-1}}_{I_n}=0\,A^{-1}=0$$

et donc $M=MI_n=0$. □

On peut en déduire un exemple typique de matrice non-inversible:

Proposition II.6. *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'une des colonnes, ou une des lignes de A est nulle. Alors A n'est pas inversible.*

Démonstration. On suppose que la i-ème ligne de $A=[a_{ij}]$ est nulle. Soit $Y=[y_j]_{1\leq j\leq n}$ la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i-ème, qui vaut 1. Alors la matrice ligne YA est nulle: en effet, le ℓ-ième coefficient de cette matrice est donné par

$$\sum_{k=1}^{n} y_k a_{k\ell}=0,$$

car $y_k=0$ si $k\neq i$ par définition de Y, et $a_{i\ell}=0$ car la i-ème ligne de A est nulle. On en déduit par la Proposition II.4 que A n'est pas inversible.

Dans le cas où la j-ième colonne de A est nulle, on fait le même raisonnement en multipliant A par la matrice colonne $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le j-ième qui vaut 1. □

On donne maintenant deux exemples où il est facile de voir si une matrice est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse.

A.2. *Matrices diagonales.*

Définition II.7. On appelle *matrice diagonale* une matrice carrée $[a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ dont les coefficients en dehors de la diagonale principale $\{i=j\}$ sont nuls. En d'autres termes:

$$i\neq j\Longrightarrow a_{ij}=0.$$

Exemples II.8. Les matrices I_n et $0\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonales.

Considérons les matrices

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{bmatrix}\text{ et }C=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}.$$

La matrice A est diagonale. Les matrices B et C ne sont pas diagonales (C n'est même pas carrées).

Remarquons que la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et que si A est diagonale, ${}^tA=A$. On note $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ ou $\operatorname{diag}(\lambda_j)_{1\leq j\leq n}$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont λ_1, λ_2,…,λ_n. Par exemple

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\operatorname{diag}(1,2,3)=\operatorname{diag}(j)_{1\leq j\leq 3},\quad I_n=\operatorname{diag}(1)_{1\leq j\leq n}.$$

On peut calculer très facilement le produit de deux matrices diagonales:

Proposition II.9. *Soit $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ et $B=\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$ deux matrices diagonales. Alors*

$$AB=\operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1,\lambda_2\mu_2,\dots,\lambda_n\mu_n).$$

La démonstration est laissée au lecteur (utiliser (1)).

Corollaire II.10. *La matrice diagonale $D=\operatorname{diag}(\lambda_j)_{1\leq j\leq n}$ est inversible si et seulement si $\lambda_j\neq 0$ pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$. Dans ce cas,*

$$D^{-1}=\operatorname{diag}(1/\lambda_j)_{1\leq j\leq n}.$$

Démonstration. Si tous les λ_j sont non nuls, il est facile de vérifier, en utilisant la proposition II.9 que

$$\mathrm{diag}(1/\lambda_j)_{1\leq j\leq n}\, D = D\ \mathrm{diag}(1/\lambda_j)_{1\leq j\leq n} = I_n.$$

Supposons qu'il existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $\lambda_k = 0$. Alors la k-ième ligne de D est nulle, et donc par la Proposition II.6, D n'est pas inversible. □

Exemples II.11. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A.3. *Inversibilité des matrices* 2×2.

Proposition II.12. *Soit* $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ *une matrice* 2×2. *Alors la matrice* A *est inversible si et seulement si* $ad - bc \neq 0$. *Dans ce cas, on a* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$.

Remarque II.13. La quantité $ad - bc$ est appelée déterminant de A. Nous verrons dans un des chapitres suivants que le déterminant se généralise à des matrices carrées de plus grande dimension.

Démonstration. La proposition découle de la formule:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad-bc)I_2,$$

et dans le cas où A n'est pas inversible, de la Proposition II.4. □

Exercice II.14. Inverser les matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} -1 & -47 \\ 27 & 1268 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 25 \\ 33 & -824 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -18 & -19 \\ 701 & 740 \end{bmatrix}.$$

A.4. *Stabilité par multiplication et transposition.*

Proposition II.15. (i) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible. Alors* ${}^tA$ *est inversible, et* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(ii) *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *deux matrices inversibles. Alors* AB *est inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. On transpose les égalités:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

ce qui donne (${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$):

$${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^tI_n = I_n,$$

d'où (i).

Pour montrer (ii), on utilise l'associativité de la multiplication:

$$AB\,B^{-1}A^{-1} = A\,I_n\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I_n,$$

et de même

$$B^{-1}A^{-1}\,AB = B^{-1}\,I_n\,B = B^{-1}B = I_n.$$

□

Avertissement II.16. Il ne faut pas se tromper dans l'ordre des facteurs dans la formule du (ii). Rappelons que la multiplication matricielle *n'est pas* commutative. On n'a donc pas, en général $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

B. **Matrices élémentaires et opérations sur les lignes.** On va montrer que les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, rencontrée dans le chapitre sur les systèmes linéaires, reviennent à des multiplications à gauche par des matrices bien particulières, appelées matrices élémentaires. On commence par définir ces matrices.

B.1. *Matrices élémentaires.* On fixe $n \geq 2$.

Définition II.17. On appelle *matrice élémentaire* une des matrices carrées $n \times n$ d'un des trois types suivants.

Soient $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. La matrice de *dilatation* $D_k(\lambda)$ est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le k-ième coefficient diagonal veut λ et les autres coefficients diagonaux valent 1.

Soient $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq \ell$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice de *transvection* $T_{k\ell}(\lambda)$ est la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, le coefficient (k, ℓ) vaut λ, et les autres coefficients sont nuls.

Si $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq \ell$, on note $R_{k\ell}$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent 1, sauf les coefficients (k, k) et (ℓ, ℓ), qui valent 0, les coefficients (k, ℓ) et (ℓ, k) valent 1, et les autres coefficients sont nuls. La matrice $R_{k\ell}$ est donc obtenue, à partir de I_n, en échangeant la ligne k et la ligne ℓ. Remarquons que $R_{\ell k} = R_{k\ell}$.

Exemples II.18. On suppose $n = 3$. Alors

$$D_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad T_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$T_{31}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice II.19. Ecrire $D_2(\lambda)$, $T_{24}(\lambda)$, $T_{42}(\lambda)$, R_{13} quand $n = 4$.

Proposition II.20. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(i) *Soient* $k \in \{1, \dots, n\}$ *et* $\lambda \neq 0$. *La matrice* $D_k(\lambda)A$ *est obtenue à partir de* A *en multipliant la* k*-ième ligne de* A *par* λ. *La multiplication à gauche par* $D_k(\lambda)$ *correspond donc à l'opération élémentaire, appelée* cadrage *et notée* $(L_k) \leftarrow \lambda(L_k)$ *dans le chapitre précédent du cours.*

(ii) *Soient* $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq \ell$ *et* $\lambda \neq 0$. *La matrice* $T_{k\ell}(\lambda)A$ *est obtenue à partir de* A *en ajoutant à la* k*-ième ligne de* A *le produit de* λ *et la* ℓ*-ième ligne de* A. *La multiplication à gauche par* $T_{k\ell}(\lambda)$ *correspond donc à l'opération élémentaire, appelée* remplacement *et notée* $(L_k) \leftarrow (L_k) + \lambda(L_\ell)$ *dans le chapitre précédent du cours.*

(iii) *Soient* $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$. *La matrice* $R_{k\ell}A$ *est obtenue à partir de* A *en échangeant les lignes* k *et* ℓ. *La multiplication à gauche par* $R_{k\ell}$ *correspond donc à l'opération élémentaire notée* $(L_k) \leftrightarrow (L_\ell)$ *dans le chapitre précédent.*

Remarque II.21. La multiplication à droite par les matrices élémentaires correspond à des opérations élémentaires sur les colonnes.

Exercice II.22. Calculer en utilisant la formule du produit ligne colonne:

$$T_{21}(\lambda) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

et vérifier que la résultat est cohérent avec la proposition II.20.

Preuve de la proposition II.20. On ne démontre que le point (ii). La démonstration des autres points est laissée au lecteur.

On note $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $T_{k\ell} = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $T_{k\ell}A = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. On a donc

$$b_{ii} = 1, \ i = 1 \dots n, \qquad b_{k\ell} = \lambda, \qquad b_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } (i, j) \neq (k, \ell).$$

Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$. La formule du produit ligne colonne (1) donne:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} b_{ir} a_{rj}. \tag{9}$$

Si $i \neq k$, $b_{ir} = 0$ pour $r \neq i$, et $b_{ii} = 1$. La formule précédente donne donc $c_{ij} = a_{ij}$. La i-ème ligne de $T_{k\ell}A$ est donc exactement la i-ème ligne de A.

On considère maintenant le cas $i = k$. On a $b_{kr} = 0$ pour $r \notin \{k, \ell\}$, $b_{kk} = 1$, et $b_{k\ell} = \lambda$. La formule (9) avec $i = k$ s'écrit donc

$$c_{kj} = a_{kj} + \lambda a_{\ell j}.$$

La k-ième ligne de $T_{k\ell}A$ est donc

$$[c_{k1},\dots,c_{kp}] = [a_{k1},\dots,a_{kp}] + \lambda[a_{\ell 1},\dots,a_{\ell p}] = (L_k) + \lambda(L_\ell),$$

en notant (L_k) et (L_ℓ) la k-ième et la ℓ-ième ligne de A. Le point (ii) est démontré. □

Exercice II.23. En s'inspirant de la démonstration précédente, montrer les points (i) et (iii) de la proposition II.20.

Proposition II.24. *Les matrices $D_k(\lambda)$ ($\lambda \neq 0$), $T_{k\ell}(\lambda)$ ($k \neq \ell$) et $R_{k\ell}$ sont inversibles et:*

(i) $(D_k(\lambda))^{-1} = D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right)$;
(ii) $(T_{k\ell}(\lambda))^{-1} = T_{k\ell}(-\lambda)$;
(iii) $R_{k\ell}^{-1} = R_{k\ell}$.

Démonstration. Le point (i) découle immédiatement du Corollaire II.10 (on peut aussi utiliser la proposition II.20 comme dans ce qui suit).

D'après la proposition II.20, la matrice $T_{k\ell}(\lambda)T_{k\ell}(-\lambda) = T_{k\ell}(\lambda)T_{k\ell}(-\lambda)\,I_n$ est obtenue à partir de la matrice I_n par les opérations:

$$(L_k) \leftarrow (L_k) - \lambda L_\ell,$$

puis

$$(L_k) \leftarrow (L_k) + \lambda L_\ell.$$

Puisque $k \neq \ell$, on a donc bien[1] $T_{k\ell}(\lambda)T_{k\ell}(-\lambda) = I_n$ et de même $T_{k\ell}(-\lambda)T_{k\ell}(\lambda) = I_n$, ce qui montre le point (ii).

D'après la proposition II.20, la matrice $R_{k\ell}R_{k\ell} = R_{k\ell}R_{k\ell}I_n$ est obtenue à partir de I_n en échangeant deux fois les lignes ℓ et k. C'est donc bien la matrice I_n, ce qui montre le point (iii). □

Exercice II.25. Calculer lorsque $n = 4$, en utilisant la formule du produit ligne-colonne, $R_{24}(17)R_{24}(-17)$ et vérifier le point (II.20).

B.2. *Matrices échelonnées réduites carrées.* On renvoie au chapitre précédent ou à [1] pour la définition d'une matrice échelonnée et d'une matrice échelonnée réduite. Le but de cette partie est de caractériser les matrices échelonnées réduites carrées inversibles.

Définition II.26. La matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure* si tous les coefficients de A en dessous de la diagonale principale sont nulle. En d'autres termes:

$$1 \leq j < i \leq n \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

Exemples II.27. Les matrices diagonales sont triangulaires supérieures. En particulier, la matrice I_n et la matrice $0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont triangulaires supérieures. Considérons les matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est triangulaire supérieure. Les matrices B et C ne le sont pas (B n'est pas carrée. Le coefficient $(2,1)$ de C est non nul).

Proposition II.28. *Une matrice échelonnée carrée est triangulaire supérieure.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée. On note p le nombre de lignes non nulles de A. On a donc $0 \leq p \leq n$, $p = n$ si toutes les lignes de A sont non nulles, $p = 0$ si $A = 0$. De plus, si $1 \leq p \leq n$, A étant échelonnée, les lignes 1, 2,…, p de A sont non nulles, et les lignes $p+1$, …, n sont nulles.

On suppose $A \neq 0$, i.e. $p \geq 1$ (sinon $A = 0$ est triangulaire supérieure et la démonstration est finie).

Pour $1 \leq i \leq p$, on note $J(i)$ la colonne de l'élément de tête (le coefficient non nul le plus à gauche) de la i-ème ligne de A. Par propriété des matrices échelonnées, on a $J(k+1) \geq J(k) + 1$ pour $k = 1 \dots p-1$ et donc, puisque $J(1) \geq 1$, $J(i) \geq i$ pour tout i entre 1 et p. On en déduit

$$(1 \leq i \leq p, \quad j < i) \Longrightarrow (1 \leq i \leq p, \quad j < J(i)) \Longrightarrow a_{ij} = 0,$$

ce qui montre que la matrice A est triangulaire supérieure. □

[1] l'hypothèse $k \neq \ell$ montre que la ligne (L_ℓ) n'a pas changé après la première opération

Théorème II.29. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée réduite. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est inversible;*
(ii) *aucune ligne de A n'est nulle;*
(iii) *$A = I_n$.*

La seule matrice échelonnée réduite inversible est donc la matrice identité.

Démonstration. La matrice I_n est inversible, donc (iii)$\Longrightarrow$(i). De plus, on sait déjà. (i)$\Longrightarrow$(ii) (cf proposition II.6).

Il reste à démontrer (ii)$\Longrightarrow$(iii). On raisonne par récurrence sur n.

Il n'y a que deux matrices échelonnées réduites 1×1: $[0]$ et $[1]$. La seule qui n'a pas de ligne nulle est $[1] = I_1$.

On suppose le résultat connu pour les matrices de taille $n-1$, où $n \geq 2$ est fixé. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ échelonnée réduite n'ayant pas de ligne nulle. La dernière ligne de A étant non nulle, et la matrice A étant triangulaire supérieure, cette dernière ligne est de la forme $[0 \ldots 0\, a]$, $a \neq 0$. De plus, puisque la matrice est sous forme réduite, on a en fait $a = 1$, et les $n-1$ premiers coefficients de la dernière colonne (qui est une colonne au-dessus de l'élément de tête) valent 0. La matrice A est donc de la forme:

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où A' est une matrice $(n-1) \times (n-1)$ sous forme échelonnée réduite, sans ligne nulle. Par hypothèse de récurrence, $A' = I_{n-1}$ et donc $A = I_n$. $\square$

B.3. *Inversions de matrices par la méthode du pivot de Gauss.* Soit A une matrice carrée. Par la méthode du pivot de Gauss (cf chapitre précédent du cours), on peut ramener A à une matrice échelonnée réduite A' par un certain nombre (disons p) de transformations élémentaires sur les lignes de A. Ces transformations élémentaires correspondant à des multiplications par des matrices élémentaires (cf §B.1 et Proposition II.20), on a:

$$E_p \ldots E_1\, A = A',$$

où les matrices E_j correspondent aux p transformations élémentaires appliquées à A. Puisque les matrices élémentaires sont inversibles, on a:

$$A = E_1^{-1} \ldots E_p^{-1} A'.$$

D'où (les matrices E_j^{-1} étant elles aussi des matrices élémentaires):

Théorème II.30. *Toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est produit de matrices élémentaires et d'une matrice échelonnée réduite A'. Elle est inversible si et seulement si $A' = I_n$, c'est à dire si et seulement si elle est produit de matrices élémentaires.*

(le dernier point découle du théorème II.29).

Donnons maintenant une méthode pratique pour étudier l'inversibilité de A, et, lorsque A est inversible, calculer son inverse. On commence par écrire sur deux colonnes la matrice A et la matrice I_n. On ramène ensuite, par la méthode du pivot de Gauss, la matrice A à une matrice échelonnée réduite, tout en appliquant les mêmes opérations élémentaires sur la matrice I_n. Si A est inversible, on obtient sur la colonne de gauche la matrice $I_n = E_p \ldots E_1\, A$ et sur la colonne de droite la matrice $E_p \ldots E_1$. L'égalité $I_n = E_p \ldots E_1\, A$ montre que la matrice obtenue sur la colonne de droite est exactement A^{-1}. Si A n'est pas inversible, on obtient sur la colonne de gauche une matrice échelonnée réduite avec au moins une ligne nulle: remarquons que dans ce dernier cas, si le but est seulement d'étudier l'inversibilité de A, la colonne de droite est inutile (et on peut arrêter la méthode du pivot dès que l'on a obtenu une ligne nulle).

Donnons un exemple. On veut inverser la matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 8 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 8 & -1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (L_2) \leftarrow (L_2) + 2(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) + 6(L_1) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_2) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_3) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_3) \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (L_1) \leftarrow (L_1) + (L_2) & \begin{bmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{array}$$

Donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On termine cette partie par une remarque qui découle facilement de la méthode précédente:

Proposition II.31. *Soit A une matrice triangulaire supérieure. Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non-nuls.*

En effet, si les coefficients diagonaux sont non-nuls, la phase de remontée de la méthode du pivot permet d'obtenir I_n à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes. En revanche, si un des coefficients diagonaux est nul, la même méthode du pivot permet d'obtenir une ligne de 0, montrant que A n'est pas inversible.

B.4. *Caractérisation des matrices inversibles.* Le théorème fondamental suivant, qui découle de ce qui précède, donne plusieurs critères pour reconnaître une matrice inversible.

Théorème II.32. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est inversible;*
(ii) *$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $BA = I_n$;*
(iii) *$\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $AC = I_n$;*
(iv) *l'équation $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, a pour seule solution $X = 0$;*
(v) *pour tout $E \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = E$, a une seule solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;*
(vi) *l'équation $YA = 0$, d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, a pour seule solution $Y = 0$;*
(vii) *pour tout $F \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, l'équation $YA = F$, a une seule solution $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.*

Démonstration. On commence par montrer que les points (i), (iii), (vi) sont équivalents. Par définition de l'inversibilité, (i)$\Rightarrow$(iii). Par ailleurs, si (iii) est vrai et $YA = 0$, alors $Y = YAC = 0C = 0$ et donc (iii)$\Rightarrow$(vi). Supposons (vi). On veut montrer que A est inversible. Par §B.3, $E_p \dots E_1 A = R$ où R est une matrice échelonnée réduite et les E_j des matrices élémentaires. On veut montrer que $R = I_n$. On raisonne par l'absurde: si $R \neq I_n$, par le théorème II.29, la dernière ligne de R est une ligne de 0. Soit $Y' = [0 \dots 01] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Alors

$$Y' E_p \dots E_1 \, A = Y' R = 0$$

et donc

$$YA = 0$$

avec $Y = Y' E_p \dots E_1 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Les matrices $E_1, \dots, E_p$ étant inversible, Y est non nul, ce qui contredit (vi). Donc A est inversible, ce qui conclut la preuve de (vi)$\Rightarrow$(i).

On montre maintenant l'équivalence des points (i), (ii) et (iv). Comme précédemment, le seul point difficile est (iv)$\Rightarrow$(i). Remarquons que (iv) implique par transposition que ${}^tA$ vérifie (vi). Puisqu'on a déjà démontré (vi)$\Rightarrow$(i), on en déduit que ${}^tA$ est inversible. Par la proposition II.15, A est aussi inversible ce qui montre (iv)$\Rightarrow$(i).

On a évidemment (v)$\Rightarrow$(iv), (i)$\Rightarrow$(v), et puisque (iv)$\Rightarrow$(i), le point (v) est équivalent à tous les points précédents.

De même, (i)$\Rightarrow$(vii)$\Rightarrow$(vi)$\Rightarrow$(i) ce qui conclut la preuve. $\square$

B.5. *Système de Cramer et matrice inversible.* Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues, et A la matrice des coefficients. La matrice A est donc une matrice carrée $n \times n$. Le système (S) s'écrit

$$AX = B,$$

où B est la matrice colonne ($B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) formé du second membre de l'équation, et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est la matrice inconnue.

Le point (i) $\Longleftrightarrow$ (v) du théorème II.32 signifie exactement:

$$(S) \text{ est un système de Cramer } \iff A \text{ est inversible.}$$

On distingue deux cas:

- La matrice A est inversible et le système (S) est un système de Cramer: il a une unique solution $X = A^{-1}B$, quel que soit le second membre B. Le calcul de A^{-1} permet de résoudre rapidement le système quel que soit B.
- Si A n'est pas inversible, le système homogène $AX = 0$ a une infinité de solutions: le point (iv) est faux, il y a donc une solution non nulle X et tous les λX, $\lambda \in \mathbb{K}$ sont aussi solutions. Le système (S) a ou bien aucune solution, ou bien une infinité de solutions. Remarquons que les deux cas peuvent se produire. Pour construire un second membre B tel que le système $AX = B$ n'a pas de solution, on se donne, grâce à (vi), une matrice ligne Y non nulle telle que $YA = 0$. Soit maintenant $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ tel que $YB \neq 0$ ($B = {}^tY$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $B = {}^t\overline{Y}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ conviennent). L'équation $AX = B$ implique $YB = 0$, ce qui montre par l'absurde qu'elle n'a pas de solution.

Exemple II.33. Résoudre les systèmes:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ -3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$$

La matrice des coefficients de ces trois systèmes est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

On montre par la méthode du pivot que A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les solutions des systèmes sont donc respectivement:

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ -1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad A^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercice II.34. Appliquer la méthode du pivot à l'exemple précédent pour calculer A^{-1}.

Appendice: réponse à un exercice

Exercice II.14. Les matrices inverses sont $\left[\begin{smallmatrix} 1268 & 47 \\ -27 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 824 & 25 \\ 33 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} -740 & -19 \\ 701 & 18 \end{smallmatrix}\right]$.

Références

[1] David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications.* troisième édition, 2004.

[2] François Liret and Dominique Martinais. *Algèbre 1re annèe - Cours et exercices avec solutions.* Dunod, deuxième édition, 2003.