L1 — Université
2012-2013 — Paris 13

Algèbre linéaire
Chapitre 3. Espaces vectoriels

Référence: Liret-Martinais [1], chapitre 6. Voir aussi Tran Van Hiep [2].

Comme dans les chapitres précédents, on dénote par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ des nombres, appelés aussi *scalaires.*

I. Espaces vectoriels

A. **Définition. Règle de calculs.**

Définition I.1. On appelle *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-*espace-vectoriel*, un ensemble E, dont les éléments sont appelés *vecteurs*, muni de deux opérations, l'*addition*, qui à deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ associe un troisième vecteur, noté $\vec{x}+\vec{y}$, et la *multiplication par un scalaire*, qui à un vecteur $\vec{x}$ et un scalaire λ associe un vecteur, noté $\lambda\vec{x}$, ayant les propriétés suivantes:

(i) *Associativité de l'addition*: $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}, \quad (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (on notera $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ leur valeur commune).
(ii) *Commutativité de l'addition*: $\forall \vec{x},\vec{y}, \quad \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$.
(iii) Il existe un élément de E, noté $\vec{0}$ tel que $\forall \vec{x}\in E$, $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$.
(iv) Pour tout vecteur $\vec{x}$, il existe un vecteur $\vec{x}'$ tel que $\vec{x}+\vec{x}'=\vec{0}$.
(v) Pour tous scalaires λ et μ, pour tout vecteur $\vec{x}$, $\lambda(\mu\vec{x})=(\lambda\mu)\vec{x}$.
(vi) Pour tous scalaires λ et μ, pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$ et $(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$.
(vii) Pour tout vecteur $\vec{x}$, $1\vec{x}=\vec{x}$.

Dans la définition, par convention, une lettre fléchée désigne toujours un vecteur (un élément de E), une lettre non fléchée un scalaire (un élément de $\mathbb{K}$). Nous utiliserons cette convention dans toute la suite du cours.

Remarque I.2. Le vecteur $\vec{0}$ vérifiant la propriété (iii) de la définition est unique: soit en effet un autre vecteur $\vec{a}$ tel que pour tout vecteur $\vec{x}$, $\vec{a}+\vec{x}=\vec{x}$. Alors

$$\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{0}.$$

La première égalité découle de la propriété $\forall\vec{x},\ \vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$, la deuxième de la propriété $\forall\vec{x},\ \vec{x}+\vec{a}=\vec{x}$. Le vecteur $\vec{0}$ est appelé *élément neutre* (pour l'addition).

B. **Quelques exemples.** On vérifie facilement que l'ensemble $\mathbb{K}$ (muni de l'addition et la multiplication usuelles) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ainsi, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathbb{C}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Dans les deux cas l'élément neutre est 0.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'addition de vecteurs est l'addition usuelle, la multiplication par un scalaire est la multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel.

Soit $n\geq 1$. On rappelle la définition de l'addition et la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{K}^n$. Si $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ et $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{K}^n$, et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\vec{x}+\vec{y}$ (respectivement $\lambda\vec{x}$) est par définition le vecteur $(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$ (respectivement le vecteur $(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$). Muni de ces deux opérations, $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel. L'élément neutre pour l'addition est le vecteur $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$.

Les opérations définies sur $\mathbb{K}^n$ dans le paragraphe précédent sont exactement l'addition et la multiplication par un scalaire définies sur les matrices au chapitre précédent, lorsqu'on identifie $\mathbb{K}^n$ à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes. Plus généralement, si $p,n\geq 1$, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, muni des opérations définies dans le chapitre 2 du cours, est un espace vectoriel. L'élément neutre est la matrice nulle.

L'ensemble $\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_1=0\right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (muni des opérations usuelles sur $\mathbb{R}^2$) de $\mathbb{R}^2$). En revanche, l'ensemble $F=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_1\geq 0\right\}$ n'est pas un espace vectoriel: l'image de F par un nombre réel strictement négatif n'est pas un élément de F.

L'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication par un scalaire *et la multiplication des matrices* n'est pas un espace vectoriel. Le lecteur est invité à déterminer quelles propriétés de la définitions sont vraies et lesquelles sont fausses dans ce cas.

L'ensemble des suites réelles, l'ensemble des polynômes réels $\mathbb{R}[X]$, ainsi que l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peuvent être munis d'une multiplication par un scalaire qui en font des espaces vectoriels réels. L'ensemble des suites complexes, $\mathbb{C}[X]$, et l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ont de même des structures d'espaces vectoriels complexes. Nous ne développerons pas cet aspect ici. Soulignons toutefois que la théorie des espaces vectoriels est beaucoup plus générale que le suggère les quelques exemples simples donnés dans les paragraphes précédents.

C. **Premières propriétés.**

Proposition I.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ des éléments de E et λ un élément de $\mathbb{K}$. Alors:*

(i) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z} \Longrightarrow \vec{y}=\vec{z}$.
(ii) $0\vec{x}=\vec{0}$.
(iii) $\lambda\vec{0}=\vec{0}$.
(iv) $\lambda\vec{x}=\vec{0} \Longrightarrow (\lambda=0 \text{ ou } \vec{x}=\vec{0})$.

Démonstration. En additionnant à chaque membre de l'égalité $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z}$ le vecteur $\vec{x}'$ donné par le point (iv) de la définition I.1, on obtient $\vec{x}'+\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}'+\vec{x}+\vec{z}$, soit $\vec{y}=\vec{z}$, ce qui donne le point (i).

Montrons (ii). On a

$$\vec{0}+1\vec{x}=1\vec{x}=(0+1)\vec{x}=0\vec{x}+1\vec{x}.$$

La première égalité résulte du (iii) de la définition I.1, la deuxième de l'égalité $0+1=1$, et la dernière du point (vi) de cette même définition. En utilisant le (i) de la proposition, on obtient $\vec{0}=0\vec{x}$.

Pour montrer (iii), on utilise encore la définition I.1 pour écrire:

$$\lambda\vec{0}+\lambda\vec{0}=\lambda(\vec{0}+\vec{0})=\lambda\vec{0}=\lambda\vec{0}+\vec{0},$$

et donc, par le point (i), $\lambda\vec{0}=\vec{0}$.

Il reste à montrer (iv). On suppose donc $\lambda\vec{x}=\vec{0}$. Si $\lambda\neq 0$, on peut multiplier cette égalité par $\frac{1}{\lambda}$, ce qui donne, par le (v) et le (vii) de la définition, $\vec{x}=\vec{0}$. □

Par (i) dans la proposition précédente, on sait que pour tout vecteur $\vec{x}$, il y a un unique vecteur $\vec{x}'$ comme dans le (iv) de la définition I.1. La proposition suivante montre que $\vec{x}'=(-1)\vec{x}$:

Proposition I.4. *Soit $\vec{x}\in E$. Alors*

$$\vec{x}+(-1)\vec{x}=\vec{0}.$$

Démonstration. En effet, par le (vi) de la définition I.1 et le (ii) de la proposition I.3,

$$\vec{x}+(-1)\vec{x}=(1-1)\vec{x}=0.$$

□

Notation I.5. On note

$$-\vec{x}=(-1)\vec{x}, \quad \vec{x}-\vec{y}=\vec{x}+(-\vec{y}).$$

D. **Espace vectoriel produit.** Si A et B sont deux ensembles, on rappelle que le produit cartésien de A et B, noté $A\times B$, est l'ensemble des (a,b), où $a\in A$ et $b\in B$.

Définition I.6. Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'espace vectoriel produit $E\times F$ est le produit cartésien $E\times F$ muni des lois suivantes: si $(\vec{x},\vec{x}')$ et $(\vec{y},\vec{y}')$ sont des éléments de $E\times F$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, alors par définition,

$$(\vec{x},\vec{x}')+(\vec{y},\vec{y}')=(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}'+\vec{y}'), \quad \lambda(\vec{x},\vec{x}')=(\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}').$$

On vérifie facilement que $E\times F$ est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemple I.7. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^2$ défini en B. est exactement l'espace vectoriel produit $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est vu comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Plus généralement, si $n \geq 1$ et $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on munit le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ (l'ensemble des $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ avec $\vec{x}_1 \in E_1, \ldots, \vec{x}_n \in E_n$) d'une addition et d'une multiplication par un scalaire qui en font un $\mathbb{K}$-espace vectoriel:

$$(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) + (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \ldots, \vec{x}_n + \vec{y}_n)$$
$$\lambda(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = (\lambda\vec{x}_1, \ldots, \lambda\vec{x}_n).$$

On appelle encore l'espace vectoriel obtenu *espace vectoriel produit.* L'espace vectoriel produit

$$\underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{n \text{ fois}}$$

au sens de cette définition est exactement l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ introduit en B.

II. Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

A. **Deux définitions équivalentes.**

Proposition II.1. *Soit F un sous-ensemble de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire de l'espace vectoriel E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(ii) *Les trois propriétés suivantes sont vérifiées:*
- $\vec{0} \in F$;
- $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2 \Longrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$;
- $(\vec{x} \in F, \lambda \in \mathbb{K}) \Longrightarrow \lambda\vec{x} \in F$.

Dans le point (ii)*, $\vec{0}$ est l'élément neutre pour l'addition sur E.*

Définition II.2. Un ensemble F vérifiant les propriétés de la proposition II.1 est appelé *sous-espace vectoriel* de E.

Remarque II.3. En pratique, la définition donnée par le point (ii) de la proposition est celle que l'on utilise. L'autre définition justifie l'expression "sous-espace vectoriel".

Preuve de la proposition. On suppose (i), i.e. que F, muni des opérations sur E, est un espace vectoriel. Notons provisoirement $\vec{0}_F$ l'élément neutre de F et $\vec{0}_E$ celui de E. On a $0\vec{0}_F = \vec{0}_E$ par la proposition I.3. Puisque F est un espace vectoriel, on doit avoir $0\vec{0}_F \in F$, donc $\vec{0}_E \in F$ (et par unicité, $\vec{0}_E = \vec{0}_F$). Les deux autres propriétés de (ii) découlent immédiatement de la définition d'un espace vectoriel.

Supposons réciproquement (ii). Alors l'addition et la multiplication par un scalaire de E définissent bien des opérations sur F. Puisque ces opérations vérifient les points (i). . . (vii) de la définition sur (I.1) sur E, elles vérifient aussi ces points sur F. La seule chose à vérifier est que l'élément $\vec{x}'$ du point (iv) est bien dans F si $\vec{x} \in F$. Mais on sait par la proposition I.4 que $\vec{x}' = (-1)\vec{x}$, et donc, puisque $-1 \in \mathbb{K}$, on a bien $\vec{x}' \in F$. □

B. **Exemples.**

Exemple II.4. Les ensembles $\{\vec{0}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés *sous-espace vectoriels triviaux* de E.

Exemple II.5. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. L'ensemble des solutions $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Exemple II.6. Si E est un espace vectoriel, et $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, l'ensemble

$$\{\lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, appelée *droite* (vectorielle) de E. Dans le cas où E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ces ensembles sont exactement les droites *passant par l'origine.*

Exemple II.7. L'ensemble $\{(\lambda, \mu, \lambda + \mu),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple II.8. Soit $n \geq 1$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}.$$

Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelé espace vectoriel des matrices symétriques.

Remarque II.9. Pour montrer qu'un certain ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est très souvent plus facile de vérifier que c'est le sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu, que de vérifier les propriétés (i)..(vii) de la définition I.1. En pratique, on utilise très rarement la définition I.1 pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

C. **Intersection.**

Proposition II.10. *Soit F et G des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. C'est immédiat.

Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in G$ et donc $\vec{0} \in F \cap G$. De même, si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des vecteurs de $F \cap G$, ce sont des vecteurs de F, donc $\vec{x} + \vec{y} \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel), et des vecteurs de G, donc $\vec{x}+\vec{y} \in G$ (car G est un sous-espace vectoriel). Par suite $\vec{x}+\vec{y} \in F \cap G$. La preuve de $(\vec{x} \in F \cap G,\ \lambda \in \mathbb{K}) \Longrightarrow \lambda\vec{x} \in F \cap G$ est identique. □

Exemple II.11. L'intersection des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$

$$F = \{(0, x_2, x_3),\ (x_2, x_3) \in \mathbb{C}^2\} \text{ et } G = \{(x_1, x_2, 0),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$:

$$F \cap G = \{(0, x, 0),\ x \in \mathbb{C}\}.$$

Proposition II.12. *Soit F_1, ..., F_n des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E*

Démonstration. Par récurrence, à partir de la proposition II.10. □

Donnons un exemple fondamental:

Exemple II.13. Soit (H) un système linéaire *homogène*:

$$\text{(H)} \qquad \left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right.$$

alors l'ensemble F des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. En effet, notons, pour $i \in \{1, \ldots, m\}$, F_i l'ensemble des solutions de l'équation $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0$. Par l'exemple II.5, c'est un sous-espace vectoriel de E. Par la proposition II.12, $F = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

On peut aussi montrer directement que F est un sous-espace vectoriel de E (ce qui a déjà été fait à la fin du chapitre I, sans utiliser l'expression "sous-espace vectoriel").

Avertissement II.14. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la réunion $F \cup G$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, la réunion des sous-espaces vectoriels $\{(x_1, 0),\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: elle contient les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ mais pas leur somme $(1, 1)$. Un résultat plus précis est donné par la proposition suivante.

Proposition II.15. *Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

Démonstration. Supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Il existe alors un vecteur $\vec{x}$ qui est dans F, mais pas dans G, et un vecteur $\vec{y}$ qui est dans G, mais pas dans F. Alors $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont tous les deux dans $F \cup G$. Mais $\vec{x} + \vec{y} \notin F$ (sinon on aurait $\vec{y} = \vec{y} + \vec{x} - \vec{x} \in F$) et $\vec{x} + \vec{y} \notin G$ (sinon on aurait $\vec{x} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{y} \in G$. Donc $\vec{x} + \vec{y} \notin F \cup G$, ce qui montre que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. □

D. **Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.** On donne maintenant un exemple important de sous-espace vectoriel. Soit $n \geq 1$ et $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ des vecteurs de E (on dit aussi que $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ est une famille de vecteurs de E).

Définition II.16. On appelle *combinaison linéaire* de $\vec{u}_1,\ldots \vec{u}_n$ un vecteur de E de la forme $\lambda_1\vec{u}_1+\ldots+\lambda_n\vec{u}_n$, où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des scalairess.

Proposition II.17. *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ de E:*

$$\Big\{\lambda_1\vec{u}_1+\ldots+\lambda_n\vec{u}_n,\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\Big\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, appelé espace vectoriel engendré par $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ *et noté*

$$\operatorname{vect}\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}.$$

Démonstration. Notons F cet ensemble. On a $\vec{0}=0\vec{u}_1+\ldots+0\vec{u}_n\in F$. Il est également très simple de vérifier que F est stable par addition et multiplication par un scalaire, ce qui montrer le résultat. □

Exemple II.18.

$$\operatorname{vect}\{\vec{0}\}=\{\vec{0}\}.$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul de E, $\operatorname{vect}\vec{u}$ est la droite engendrée par $\vec{u}$ (cf exemple II.6).

Exemple II.19. Soit $\vec{u}=(1,0,1)$ et $\vec{v}=(0,1,1)$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ $\operatorname{vect}\{\vec{u},\vec{v}\}$ est

$$\{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}=\{(\lambda,\mu,\lambda+\mu),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}.$$

C'est exactement le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ vu dans l'exemple II.7.

L'espace vectoriel engendré par $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ est le plus petit espace vectoriel qui contient $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$:

Proposition II.20. *Soit $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ des vecteurs d'un espace vectoriel E, et F un sous-espace vectoriel de E tel que*

$$\forall j\in\{1,\ldots,n\},\ \vec{u}_j\in F.$$

Alors $\operatorname{vect}(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)\subset F$.

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

E. **Somme, somme directe, supplémentaires.**

E.1. *Somme de deux sous-espaces vectoriels.* La démonstration (facile) de la proposition suivante est laissée au lecteur:

Proposition II.21. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ensemble $H=\{\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}\in E,\ \vec{y}\in F\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition II.22. Le sous-espace vectoriel H de la proposition précédente est noté $F+G$ et appelé *somme* de F et G.

Exemple II.23. Soit $F=\{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1=0\}$ et $G=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_3=0\}$. Alors

$$F+G=\mathbb{R}^3.$$

En effet, si $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, on a:

$$(x_1,x_2,x_3)=\underbrace{(0,x_2,x_3)}_{\in F}+\underbrace{(x_1,0,0)}_{\in G},$$

et donc $\vec{x}\in F+G$.

Exemple II.24. Soit $n,p\geq 1$ et $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$, $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p$ des vecteurs de E. Alors

$$\operatorname{vect}\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}+\operatorname{vect}\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}=\operatorname{vect}\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}.$$

En effet, notons F l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_j$ et G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}_j$. Par définition, $F+G$ est l'ensemble des $\vec{x}+\vec{y}$ avec $\vec{x}\in F$ et $\vec{y}\in G$. En utilisant la définition d'un espace vectoriel engendré, on obtient:

$$F+G=\Big\{\lambda_1\vec{u}_1+\ldots+\lambda_n\vec{u}_n+\mu_1\vec{v}_1+\ldots+\mu_p\vec{v}_p,\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\ldots,\mu_p)\in\mathbb{K}^{n+p}\Big\}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Exemple II.25. La somme des droites de $\mathbb{R}^3$, $\{(x,0,0),\ x\in\mathbb{R}\}$ et $\{(0,y,0),\ y\in\mathbb{R}\}$ est le plan de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x,y,0),\ x\in\mathbb{R}\}.$$

Ceci découle immédiatement de la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. C'est aussi un cas particulier de l'exemple précédent (avec $n=p=1$, $\vec{u}_1=(1,0,0)$ et $\vec{v}_1=(0,1,0)$.

E.2. *Somme directe.*

Définition II.26. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que la somme de F et G est directe quand tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique $\vec{x}+\vec{y}$ avec $\vec{x}\in F$ et $\vec{y}\in G$. En d'autres termes:

$$\left(\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}'+\vec{y}',\ (\vec{x},\vec{x}')\in F^2 \text{ et } (\vec{y},\vec{y}')\in G^2\right)\Longrightarrow\left(\vec{x}=\vec{x}' \text{ et } \vec{y}=\vec{y}'\right).$$

On note alors $F\oplus G$ la somme de F et G.

Proposition II.27. *La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F\cap G=\{\vec{0}\}$.*

Démonstration. Supposons que la somme est directe. Soit $\vec{x}\in F\cap G$. Alors

$$\underbrace{\vec{x}}_{\in F}+\underbrace{\vec{0}}_{\in G}=\underbrace{\vec{0}}_{\in F}+\underbrace{\vec{x}}_{\in G},$$

et par unicité de la décomposition d'un vecteur comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, on obtient $\vec{x}=\vec{0}$. D'où $F\cap G=\{\vec{0}\}$.

Supposons maintenant $F\cap G=\{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ des vecteurs de F, $\vec{y}$ et $\vec{y}'$ des vecteurs de G. On suppose

$$\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}'+\vec{y}'.$$

Alors

$$\vec{x}-\vec{x}'=\vec{y}-\vec{y}'.$$

Donc $\vec{x}-\vec{x}'=\vec{y}-\vec{y}'\in F\cap G$ (car $\vec{x}-\vec{x}'\in F$ et $\vec{y}-\vec{y}'\in G$). Puisque $F\cap G=\{\vec{0}\}$, on en déduit $\vec{x}=\vec{x}'$ et $\vec{y}=\vec{y}'$, ce qui termine la preuve. □

Exemple II.28. La somme $F+G$ de l'exemple II.23 n'est pas directe. En effet, on voit facilement que

$$F\cap G=\{(x_1,x_2,x_3),\ \text{t.q. } x_1=0 \text{ et } x_3=0\}=\operatorname{vect}\{(0,1,0)\}\neq\{\vec{0}\}.$$

Exemple II.29. La somme des droites de $\mathbb{R}^3$, $\{(x,0,0),\ x\in\mathbb{R}\}$ et $\{(0,y,0),\ y\in\mathbb{R}\}$ est directe. Le seul point commun à ces droites est bien l'origine $\{\vec{0}\}$.

E.3. *Supplémentaires.*

Définition II.30. On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont *supplémentaires dans E* lorsque

$$E=F\oplus G.$$

En d'autres termes, la somme de F et G est directe, et égale à E.

Si F et G sont supplémentaires dans E, tout élément $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique $\vec{x}=\vec{y}+\vec{y}'$ avec $\vec{y}\in F$ et $\vec{y}'\in G$.

Exemple II.31. Les espaces F et G des exemples II.23 et II.28 ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: leur somme est bien égale à $\mathbb{R}^3$, mais elle n'est pas directe.

Les deux droites de $\mathbb{R}^3$ apparaissant dans l'exemple II.29 ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: leur somme est directe, mais elle ne vaut pas $\mathbb{R}^3$.

Exemple II.32. Soit $F=\{(x_1,0,x_3),\ (x_1,x_3)\in\mathbb{K}^2\}$ et $G=\operatorname{vect}\{(0,1,1)\}$. Vérifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

E.4. *Somme de plusieurs espaces vectoriels.* On généralise ici E.1, E.2 et E.3 au cas de plusieurs espaces vectoriels.

Soit $E_1,\ldots,E_n$ des sous-espaces vectoriels de E ($n \geq 2$).

La *somme* $E_1+\ldots+E_n$ (notée encore $\sum_{j=1}^n E_j$) est le sous-ensemble de E formé des vecteurs $\vec{v}_1+\ldots+\vec{v}_n$, avec $\vec{v}_j \in E_j$ pour $j = 1\ldots n$. On montre facilement que c'est un sous-espace vectoriel de E.

On dit que cette somme est *directe* (et on la note $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$) lorsque l'écriture $\vec{v} = \vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n$ avec $\vec{v}_j \in E_j$ pour tout j est unique, i.e. lorsque

$$\left(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n = \vec{v}_1' + \ldots + \vec{v}_n' \text{ et } \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \vec{v}_j \in E_j, \vec{v}_j' \in E_j\right) \Longrightarrow \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \vec{v}_j = \vec{v}_j'.$$

Cette condition est bien sûr équivalente à

$$\left(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n = \vec{0} \text{ et } \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \vec{v}_j \in E_j\right) \Longrightarrow \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \vec{v}_j = \vec{0}.$$

Si la somme est directe, on a $j \neq k \Longrightarrow E_j \cap E_j = \{\vec{0}\}$, mais cette condition n'est pas suffisante dès que $n \geq 3$ (cf exemple ci-dessous).

Comme dans le cas $n = 2$, on dit que $E_1,\ldots,\ E_n$ sont *supplémentaires* lorsque leur somme est directe et vaut E. Ainsi, les espaces $(E_j)_{j=1\ldots n}$ sont supplémentaires si et seulement si tout élément $\vec{v}$ de E s'écrit de manière unique $\vec{v} = \sum_{j=1}^n \vec{v}_j$, avec $\vec{v}_j \in E_j$ pour tout j.

Exemple II.33. On considère

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\}, \quad D_1 = \text{vect}\{(1,0,1)\}, \quad D_2 = \text{vect}\{(0,1,0)\}.$$

Alors $P + D_1 + D_2 = \mathbb{R}^3$. En effet, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit:

$$(x,y,z) = \underbrace{(z-x)(0,0,1)}_{\in P} + \underbrace{x(1,0,1)}_{\in D_1} + \underbrace{y(0,1,0)}_{\in D_2}.$$

De plus, cette somme n'est pas directe:

$$\underbrace{(1,1,1)}_{\in P} - \underbrace{(1,0,1)}_{\in D_1} - \underbrace{(0,1,0)}_{\in D_2} = (0,0,0).$$

Exemple II.34. Soit $n \geq 1$. Notons $\vec{e}_j$ le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la j-ième qui vaut 1. Alors les n droites vect$(\vec{e}_j)$, $j = 1\ldots n$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

III. Espaces vectoriels de dimension finie

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

A. **Famille de vecteurs. Indépendance linéaire.**

A.1. *Famille de vecteurs.*

Définition III.1. Soit N un entier ≥ 1. Une *famille* (finie) $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E est un n-uplet $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ de vecteurs de E. On note $\vec{u} \in \mathcal{F}$ quand $\vec{u}$ est un des vecteurs $\vec{u}_j$. Le nombre n est le *cardinal* de $\mathcal{F}$, et on note $n = |\mathcal{F}|$. On convient qu'il existe une seule famille de cardinal 0, notée $\emptyset$.

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ et $\mathcal{G} = (\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)$ deux familles de vecteurs. On note $\mathcal{F}\cup\mathcal{G} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)$.

Si $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ est une famille de vecteurs, et $\mathcal{G}$ est une autre famille de la forme $(\vec{u}_{k_1},\ldots,\vec{u}_{k_p})$ avec $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leq n$, on dit que $\mathcal{G}$ est *extraite* de $\mathcal{F}$, et on note $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. On dit aussi que la famille $\mathcal{F}$ complète la famille $\mathcal{G}$.

Exemple III.2. Soit $\mathcal{F} = \Big((1,0,0),(0,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\Big)$ et $\mathcal{G} = \Big((1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\Big)$. Alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $|\mathcal{F}| = 4$, $|\mathcal{G}| = 3$, et $\mathcal{G}$ est extraite de $\mathcal{F}$.

A.2. *Familles libres.*

Définition III.3. Une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ de E est *libre* si la propriété suivante est vérifiée:

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n = \vec{0} \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ sont *linéairement indépendants.* Si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée.*

Exemple III.4. La famille[1] $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. En effet, supposons

$$x_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

i.e $x_2=0$, $x_1+x_2=0$ et $x_1+2x_2=0$. Alors $x_1=x_2=0$.

On voit sur cet exemple que montrer qu'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre revient à montrer qu'un certain système linéaire homogène à p inconnues et n équations a pour seule solution la solution nulle.

Exemple III.5. Soit $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. La famille $\mathcal{G}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ est libre dans $\mathbb{C}^3$. Comme dans l'exemple précédent, on est ramené à étudier un système homogène. Soit $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$ tels que $x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3=\vec{0}$. Alors

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad x_2=0 \text{ et } x_1=0,$$

ce qui donne facilement $x_1=x_2=x_3=0$.

Exemple III.6. Soit $\vec{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\vec{u}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$. Alors la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est liée. En effet:

$$\vec{u}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3=\vec{0}.$$

Exemple III.7. Si $\vec{0}\in\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est liée. En effet $1.\vec{0}=\vec{0}$, et $1\neq 0$.

Exemple III.8. Une famille à un élément $\vec{u}$ est libre si et seulement si $\vec{u}\neq\vec{0}$. En effet, si $\vec{u}=\vec{0}$ la famille n'est pas libre (cf exemple précédent). En revanche, si $\vec{u}\neq 0$, alors, par la Proposition I.3

$$\lambda\vec{u}=\vec{0}\Longrightarrow\lambda=0$$

ce qui montre que la famille $(\vec{u})$ est libre.

Avertissement III.9. D'une manière générale, le caractère libre ou liée d'une famille peut dépendre du choix de $\mathbb{K}$. Par exemple la famille $(1,i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est libre:

$$(x+iy=0,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R})\Longrightarrow x=y=0.$$

En revanche, c'est une famille liée du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$:

$$1\times 1+i\times i=0,\quad (1,i)\neq(0,0).$$

La proposition suivante découle immédiatement de la définition d'une famille libre:

Proposition III.10. *Si $\mathcal{F}$ est une famille libre, tout famille extraite de $\mathcal{F}$ est libre.*

On termine cette partie sur les famille libres par un résultat utile:

Proposition III.11. *Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\vec{v}\in E$. Alors la famille $\mathcal{F}\cup(\vec{v})$ est libre si et seulement si $\vec{v}\notin\operatorname{vect}\mathcal{F}$.*

Démonstration. On note $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$. On rappelle la définition de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ (cf §D):

$$\operatorname{vect}\mathcal{F}=\Big\{x_1\vec{u}_1+\ldots+x_n\vec{u}_n,\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n\Big\}.$$

Supposons d'abord que $\mathcal{F}\cup(\vec{v})$ est libre. Si $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, on a

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{u}_j-\vec{v}\neq\vec{0}.$$

En effet, c'est une combinaison linéaire d'éléments de la famille libre $\mathcal{F}\cup(\vec{v})$ avec au moins un des coefficients (celui de $\vec{v}$) non nul. Donc $\vec{v}\notin\operatorname{vect}\mathcal{F}$.

[1]On rappelle que l'on identifie un élément de $\mathbb{K}^n$ à une matrice colonne. Dans ce chapitre on utilisera donc indiféremment la notation $(x_1,\ldots,x_n)$ ou la notation matricielle pour un élément de $\mathbb{K}^n$

Réciproquement, on suppose $\vec{v} \notin \operatorname{vect} \mathcal{F}$. Soit $(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On suppose

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{u}_j + y\vec{v} = \vec{0}$$

Alors $y = 0$: sinon on aurait $\vec{v} = -\frac{1}{y} \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{u}_j \in \operatorname{vect} \mathcal{F}$. Donc

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{u}_j = \vec{0},$$

ce qui implique, la famille étant libre, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. □

Exemple III.12. Une famille de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre si et seulement si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}$ n'est pas dans la droite $\operatorname{vect} \vec{u}$. Ceci découle immédiatement des deux propositions précédentes.

A.3. *Familles génératrices.*

Définition III.13. La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille *génératrice* de E (ou simplement génératrice quand il n'y a pas d'ambiguïté) quand pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n.$$

On dit aussi que $\mathcal{F}$ *engendre* E.

Remarque III.14. La famille $\mathcal{F}$ est génératrice si et seulement si $\operatorname{vect} \mathcal{F} = E$.

Exemples III.15. La famille $\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$: si $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, et donc $\mathbb{R}^2 = \operatorname{vect} \mathcal{F}_1$.

La famille $\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$. En effet, la dernière coordonnée de tout élément de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ est nulle, et donc par exemple $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ n'est pas dans $\operatorname{vect} \mathcal{F}_2$.

La famille $\mathcal{G}$ de l'exemple III.5 est une famille génératrice de $\mathbb{C}^3$. En effet, il s'agit de montrer que pour tout $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{C}^3$, il existe (x_1, x_2, x_3) tel que

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

ou encore:

$$x_1 + x_2 + x_3 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad x_1 = b_3.$$

Il est facile de résoudre ce système. On peut aussi remarquer que c'est un système de Cramer par l'exemple III.5: il a 3 équations, 3 inconnues, et une seule solution lorsque $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Il a donc une unique solution quelquesoit (b_1, b_2, b_3).

Plus généralement, montrer qu'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est *génératrice* revient à montrer qu'une famille de système non-homogène à n équations et p inconnues admet toujours au moins une solution.

Le résultat suivant est une conséquence directe de la définition d'une famille génératrice:

Proposition III.16. *Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice. Alors toute famille qui complète $\mathcal{F}$ est encore génératrice.*

B. **Base, dimension finie.**

B.1. *Base.*

Définition III.17. Une famille $\mathcal{F}$ de E est une *base* quand elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple III.18. La famille $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^2$. Plus généralement, si $n \geq 1$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, définissons $\vec{e}_j$ comme le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la j-ième, qui vaut 1. Alors la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

Exemple III.19. La famille $\mathcal{G}$ de l'exemple III.5 est une base de $\mathbb{C}^3$: ceci découle de l'exemple III.5 et du dernier paragraphe des exemples III.15.

Exemple III.20. La famille $\left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$: elle est libre mais pas génératrice (pourquoi?).

Exemple III.21. La famille $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$: elle est génératrice mais pas libre (pourquoi?).

Proposition et définition III.22. *Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Alors tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique*

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j.$$

Les x_j sont appelés coordonnées *de $\vec{x}$ dans la base E.*

Démonstration. La famille $\mathcal{B}$ étant génératrice, tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j.$$

Montrons l'unicité de cette écriture. Supposons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j = \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \vec{e}_j = \vec{0}.$$

La famille $\mathcal{B}$ étant libre, on en déduit $x_j - y_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Exemple III.23. La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (mais pas du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$: cette famille n'est pas libre). Les coordonées d'un élément z de $\mathbb{C}$ dans cette base sont la partie réelle et la partie imaginaire de z.

B.2. *Espace vectoriel de dimension finie. Existence de bases.*

Définition III.24. On dit que E est *de dimension finie* quand il admet une famille génératrice finie. On convient que l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est de dimension finie, et que la famille vide est une famille génératrice de $\{\vec{0}\}$.

Exemple III.25. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie: la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est une famille génératrice finie.

Proposition III.26. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet une base. Plus précisément, de toute famille génératrice $\mathcal{F}$ on peut extraire une base.*

Démonstration. Le cas $E = \{\vec{0}\}$ est immédiat. On suppose donc $E \neq \{\vec{0}\}$. Si $n \geq 1$, on note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété suivante:

De toute famille génératrice de E de cardinal n on peut extraire une base de E.

(Si il n'existe aucune famille génératrice finie de cardinal n, la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est automatiquement vraie.) On va montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout n, par récurrence sur n.

Montrons $(\mathcal{P}_1)$. Si E n'admet pas de famille génératrice à 1 élément, $(\mathcal{P}_1)$ est vrai. Dans le cas contraire, on se donne $\mathcal{G} = (\vec{u})$ une famille génératrice de E à 1 élément. Puisque $E \neq \{\vec{0}\}$, $\vec{u} \neq \{0\}$. Donc $(\vec{u})$ est libre (cf exemple III.8), ce qui montre que $\mathcal{G}$ est une base.

Soit $n \geq 1$. Supposons $(\mathcal{P}_n)$ et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$. Soit $\mathcal{G} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+1})$ une famille génératrice de E à $n+1$ éléments (là encore, si une telle famille n'existe pas, $(\mathcal{P}_{n+1})$ est automatiquement vraie). Si $\mathcal{G}$ est libre, c'est une base (extraite de $\mathcal{G}$). Sinon, il existe $n+1$ scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_{n+1} \vec{u}_{n+1} = \vec{0}.$$

Soit $j \in \{1,\dots,n+1\}$ tel que $\lambda_j \neq 0$. On a alors:

$$\vec{u}_j = -\frac{1}{\lambda_j} \sum_{\substack{1\leq k\leq n+1\\ k\neq j}} \lambda_k \vec{u}_k.$$

Soit $\mathcal{G}'$ la famille obtenue à partir de $\mathcal{G}$ en retirant $\vec{u}_j$. L'égalité précédente montre que $\operatorname{vect}\mathcal{G} = \operatorname{vect}\mathcal{G}'$, et donc que $\mathcal{G}'$ est aussi génératrice. Mais $|\mathcal{G}'| = n$. Par $(\mathcal{P}_n)$, on peut extraire une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}'$. La base $\mathcal{B}$ est aussi extraite de $\mathcal{G}$, ce qui conclut la preuve. □

C. **Dimension d'un espace vectoriel. Caractérisation des bases.** On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

C.1. *Cardinaux des familles libres et génératrices.* On rappelle que le *cardinal* d'une famille $\mathcal{F}$, noté $|\mathcal{F}|$, est le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$.

Le résultat suivant est à la base de la théorie de la dimension des espaces vectoriels. On utilise pour le démontrer un résultat du chapitre 1 du cours sur les systèmes linéaires.

Théorème III.27. *Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}|$.*

Démonstration. On note $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p)$ et $\mathcal{G} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$. On veut montrer $n \geq p$. On raisonne par l'absurde.

Supposons $n < p$. Puisque $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, il existe, pour tout indice $j \in \{1,\dots,p\}$, des n scalaires $a_{1j},\dots,a_{nj}$ tels que

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i. \tag{1}$$

Puisque $n < p$, le système homogène

$$\forall i = 1\dots n, \quad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = 0$$

qui a p équation et n inconnues (donc strictement plus d'inconnues que d'équations) a, d'après le chapitre 1 sur les systèmes linéaires une infinité de solution. Notons $(x_1,\dots,x_p)$ une solution non nulle de ce système. Alors, d'après (1),

$$x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_p\vec{u}_p = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right)\vec{e}_i = \vec{0},$$

car les n termes entre parenthèse dans la somme précédente sont nulles, par définitions des x_j. Puisque $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p)$ est libre, on doit avoir $x_1 = \ldots = x_p = 0$, une contradiction. □

C.2. *Dimension.*

Théorème et définition III.28. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors:*

(i) *Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé* dimension *de E et noté* $\dim E$.
(ii) *Le cardinal de toute familles libre de E est inférieur ou égal à* $\dim E$.
(iii) *Le cardinal de toute famille génératrice de E est supérieur ou égal à* $\dim E$.

Démonstration. Les trois points sont conséquences du théorème III.27

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Puisque $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ génératrice, le théorème III.27 implique $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$. De plus, $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice, donc $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$. D'où (i).

Les points (ii) et (iii) découlent immédiatement du théorème III.27, en utilisant encore qu'une base est une famille libre et génératrice. □

Exemples III.29. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{K}$: la base canonique a n éléments.

Soit E un espace vectoriel et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E. Alors l'espace vectoriel $\operatorname{vect}(\vec{u})$ est de dimension 1: il a pour base $\vec{u}$.

La famille de $\mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1\\2\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1\\0\\i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\i\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}\\i+2\\3 \end{bmatrix} \right)$$

n'est pas une famille libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ d'après le point (ii): cette famille a 4 éléments, alors que $\mathbb{C}^3$ est de dimension 3.

La famille de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{G} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Exemple III.30. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre (finie) de E. Alors $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, qui est de dimension finie: il découle immédiatement des définitions que $\mathcal{F}$ est une base de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$.

Exercice III.31. Démontrer que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np sur $\mathbb{K}$. On pourra pour cela considérer une base dont les éléments sont les matrices $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf un qui vaut 1.

Avertissement III.32. La dimension d'un espace vectoriel dépend du choix de $\mathbb{K}$: l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ (base (1))et de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ (base $(1, i)$). En cas d'ambiguïté, on note $\dim_{\mathbb{C}} E$ ou $\dim_{\mathbb{R}} E$ la dimension de l'espace vectoriel E (en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou $\mathbb{C}$-espace vectroiel). Par exemple $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Le lecteur est invité à montrer que la famille $\mathcal{F}$ des exemples III.29 est libre en tant que famille du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, ce qui ne contredit pas le point (ii) du théorème, étant donné que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6$.

La dimension d'un produit d'espaces vectoriels est facile à calculer.

Proposition III.33. *Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finies respectivement n et p, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p)$ une base de F. Alors*

$$\Big((\vec{e}_1, 0), \ldots, (\vec{e}_n, 0), (0, \vec{f}_1), \ldots, (0, \vec{f}_p) \Big)$$

est une base de $E \times F$. En particulier

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

La preuve est laissée en exercice au lecteur.

C.3. *Caractérisation des bases.*

Théorème III.34. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathcal{F}$ est une base de E.*
(ii) *$\mathcal{F}$ est une famille libre, et $|\mathcal{F}| = \dim E$.*
(iii) *$\mathcal{F}$ est une famille génératrice, et $|\mathcal{F}| = \dim E$.*

Démonstration. Les implications (i)$\Longrightarrow$(ii) et (i)$\Longrightarrow$(iii) découlent de la définition d'une base et du théorème III.28.

Notons $n = \dim E$.

Montrons (iii)$\Longrightarrow$(i). Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice à n éléments. Alors, par la proposition III.26, il existe une base $\mathcal{B}$ de E extraite de $\mathcal{F}$. Mais $|\mathcal{B}| = |\mathcal{F}|$, donc $\mathcal{B} = \mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est une base.

Montrons maintenant (ii)$\Longrightarrow$(i). Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille libre de E à n éléments. Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Soit $\vec{x} \in E$. Par le théorème III.28, la famille $\mathcal{F} \cup (\vec{x})$ n'est pas libre (elle a $n+1$ éléments). Par la Proposition III.11, $\vec{x} \in \operatorname{vect} \mathcal{F}$. On a bien montré que $\mathcal{F}$ est génératrice, ce qui termine la preuve. □

Remarque III.35. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On se donne une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, de cardinal n. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre. Dans le cas $E = \mathbb{K}^n$, il suffit donc, pour déterminer si $\mathcal{F}$ est une base, de savoir si un système homogène de n équations à n inconnues est un système de Cramer (ou encore si la matrice des coefficients du système est inversible). On évite ainsi de résoudre un système non-homogène (ce que l'on doit faire pour montrer directement qu'une famille de $\mathbb{K}^n$ engendre $\mathbb{K}^n$). Le lecteur est par exemple invité à montrer que

$$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

On termine cette section sur la dimension finie par un résultat important, le théorème de la base incomplète:

Théorème III.36. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre de E, de cardinal p. Alors $p \leq n$ et on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n)$ de E.*

Démonstration. L'inégalité $p \leq n$ découle du théorème III.28. Montrons par récurrence descendante sur $p \in \{1, \dots, n\}$ que toute famille libre de cardinal p peut être complétée en une base.

C'est vrai lorsque $p = n$: par le théorème III.34, une famille libre de cardinal n est une base.

Soit $p \in \{1, \dots, n-1\}$. Supposons le résultat vrai pour les familles libres de cardinal $p+1$. Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre de cardinal p. Puisque $p < n$, $\mathcal{L}$ n'est pas une base. Elle n'est donc pas génératrice, et il existe $\vec{u}_{p+1} \in E$ tel que $\vec{u}_{p+1} \notin \operatorname{vect} \mathcal{L}$. Montrons que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ est libre. Supposons donc, pour des scalaires $x_1, \dots, x_{n+1}$,

$$\sum_{j=1}^{p+1} x_j \vec{u}_j = \vec{0}.$$

Si $x_{p+1} \neq 0$, $\vec{u}_{p+1} = -\frac{1}{x_{p+1}} \sum_{j=1}^{p} x_j \vec{u}_j$ est un élément de $\operatorname{vect} \mathcal{L}$, ce qui contredit la définition de $\vec{u}_{p+1}$. Donc $x_{p+1} = 0$ et $\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{u}_j = \vec{0}$. La famille $(\vec{u}_j)_{j=1\dots p+1}$ est libre. Par hypothèse de récurrence, on peut la compléter en une base de E, ce qui termine la preuve. $\square$

IV. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

A. **Dimension d'un sous-espace vectoriel.**

A.1. *Dimension finie d'un sous-espace vectoriel.*

Théorème IV.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$.

Démonstration. Le principe de la preuve est de trouver une base de F, en choisissant une famille libre maximale de F.

Soit $n = \dim E$. On commence par remarquer que toute famille libre de E est de cardinal $\leq n$. En effet, une telle famille est aussi une famille libre de E, qui est de dimension n, et il le résultat découle du théorème III.28, (ii).

Soit

$$p = \max \Big\{ |\mathcal{L}|,\ \mathcal{L} \text{ famille libre de } F \Big\} \leq n.$$

L'entier p est bien défini (c'est le maximum d'une famille d'entiers majorée par n). Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de F, de cardinal p. Montrons que $\mathcal{L}$ engendre F. On en déduira que $\mathcal{L}$ est une base de F, et donc que F est de dimension finie $p \leq \dim E$.

On note $\mathcal{L} = \Big\{ u_1, \dots, u_p \Big\}$. Soit $\vec{v} \in F$. La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v})$ n'est pas libre (car c'est une famille de cardinal $p+1 \geq p$). Par la proposition III.11, $\vec{v} \in \operatorname{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.

Ceci montre que $\mathcal{L}$ engendre $\mathcal{F}$ et donc, comme annoncé, que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathcal{F}$. $\square$

Exemple IV.2. Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (un plan) de $\mathbb{R}^3$. En effet,

$$F = \{(x,x,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,1,0) + z(0,0,1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{vect}\big((1,1,0),(0,0,1)\big).$$

La famille $\big((1,1,0),(0,0,1)\big)$ engendre F. Puisque c'est une famille libre, c'est une base de F, ce qui montre le résultat annoncé.

Le seul sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$ est E lui-même:

Proposition IV.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de même dimension* $\dim E$. *Alors $E = F$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de E, de dimension $\dim E$. Par le théorème III.34, $\mathcal{B}$ est une base de E. Donc $\dim E = |\mathcal{B}| = \dim F$. $\square$

Définition IV.4. On appelle *rang* d'une famille de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

A.2. *Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels.*

Théorème IV.5. *Soit E de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Corollaire IV.6. *Sous les hypothèses du théorème, si la somme $F \oplus G$ est directe,* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. *Si de plus F et G sont supplémentaires dans E,* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Preuve du théorème IV.5. On note p la dimension de F, q celle de G et k celle de $F \cap G$. On sait (cf Théorème IV.1), que $k \leq p$ et $k \leq q$. On se donne une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ de $F \cap G$. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \dots, \vec{f}_p)$ de F et une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \dots, \vec{g}_q)$ de G. Il suffit de montrer que $\mathcal{A} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_{k+1}, \dots, \vec{g}_q)$ est une base de $F+G$: on aurait alors comme annoncé $\dim(F+G) = k + (p-k) + (q-k) = p+q-k$.

La famille $\mathcal{A}$ engendre $F+G$: tout vecteur de $F+G$ s'écrit $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F = \operatorname{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \dots, \vec{f}_p)$ et $\vec{g} \in G = \operatorname{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \dots, \vec{g}_q)$.

Il reste à prouver que la famille $\mathcal{A}$ est libre. On se donne des scalaires $(x_i)_{i=1,\dots,k}$, $(y_i)_{i=k+1,\dots,p}$ et $(z_i)_{i=k+1,\dots,q}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{p} y_i \vec{f}_i + \sum_{i=k+1}^{q} z_i \vec{g}_i = \vec{0}. \tag{2}$$

On en déduit $\sum_{i=k+1}^{q} z_i \vec{g}_i = -\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{e}_i - \sum_{i=k+1}^{p} y_i \vec{f}_i \in F \cap G$. Notons $(t_1, \dots, t_k)$ les coordonnées de ce vecteur dans la base $(e_i)_{i=1\dots k}$ de E. On a donc, par (2),

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i + t_i) \vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{p} y_i \vec{f}_i = \vec{0},$$

ce qui implique, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \dots, \vec{f}_p)$ étant libre, que $y_{k+1} = \dots = y_p = 0$. En revenant à (2), on obtient

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{q} z_i \vec{g}_i = \vec{0},$$

ce qui montre, en utilisant que la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \dots, \vec{g}_q)$ est libre, que $x_1 = \dots = x_k = z_{k+1} = \dots = z_q = 0$. Finalement, tous les coefficients de la combinaison linéaire (2) sont bien nuls, ce qui montre comme annoncé que la famille $\mathcal{A}$ est libre. $\square$

Exemple IV.7. Le théorème IV.5 donne une information “gratuite” (la dimension) pour calculer $F+G$. Considérons par exemple les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\}$ et $G = \operatorname{vect}\{(1,1,0), (1,0,1)\}$. Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Pour cela, on remarque que $\dim F = 2$ (exemple IV.2), $\dim G = 2$ (G est engendré par une famille libre de dimension 2). De plus $\dim(F \cap G) = 1$. En effet, si $\vec{x} = (x,y,z) \in G$, alors $\vec{x}$ s'écrit $\lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1)$. De plus, $\vec{x} \in F \iff x = y \iff \mu = 0$. Donc $F \cap G = \operatorname{vect}\{(1,1,0)\}$ est bien de dimension 1. Par le théorème IV.5,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Par la proposition IV.3, $F + G = \mathbb{R}^3$.

B. **Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.** On connaît deux façons de décrire un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$: comme l'espace vectoriel engendré par une de ses bases, ou comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (on parle dans ce deuxième cas de *description par des équations cartésiennes*, ou simplement de *description cartésienne* de F). On explique ici comment passer d'une de ces écritures à l'autre.

B.1. *Passer d'un système d'équations à une base.* Soit (S) un système linéaire homogène sur $\mathbb{K}$ à n inconnues. L'ensemble F des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. La méthode du pivot de Gauss, vue au chapitre 1 du cours, permet de déterminer une base de F: on trouve, par cette méthode, un système (S') équivalent à (S) et sous forme échelonnée réduite. Soit p le nombre de lignes non nulles de (S'). D'après le chapitre 1, on peut décrire l'ensemble F avec $n-p$ paramètres (les variables libres du système). Cette description donne une base de (S') à $n-p$ éléments.[2] L'espace vectoriel F est de dimension $n-p$.

[2] le fait que cette famille est libre résulte de la forme échelonnée de (S')

Considérons par exemple l'espace vectoriel

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x + 2y - t = 0 \text{ et } z + 2t = 0\right\}.$$

Les variables libres sont y et t, les variables de base x et z. L'ensemble F est donné par

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} -2y+t \\ y \\ -2t \\ t \end{bmatrix},\ (y,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ (y,t) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

ou encore

$$F = \operatorname{vect} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

La famille $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base de F.

B.2. *Passer d'une famille génératrice à un système d'équations.* Soit maintenant F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ dont on connaît une famille génératrice $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k)$. On cherche une description cartésienne de F. Soit $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. On écrit

$$\begin{aligned} \vec{x} \in F &\iff \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k,\ \lambda_1 \vec{f}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{f}_k = \vec{x} \\ &\iff \text{Le système } (S) : \lambda_1 \vec{f}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{f}_k = \vec{x}, \text{ d'inconnues } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \text{ est compatible.} \end{aligned}$$

On transforme alors, par la méthode du pivot, le système (S) en un système sous forme échelonnée réduite (S'). La compatibilité des systèmes (S) et (S') est équivalente à la nullité des membres de droite des lignes de (S') dont le membre de gauche est nul, ce qui donne un système linéaire sur les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\vec{x}$, donc une description cartésienne de F.

Exemple IV.8. Soit $F = \operatorname{vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Alors

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in F \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ t.q. } (S) \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\lambda - \mu = y \\ -4\lambda - \mu = z \end{cases}$$

Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) + 4(L_1)$, puis $(L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2)$, on obtient le système sous forme échelonné réduite, équivalent au système (S):

(S')
$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -7\mu = y - 3x \\ 0 = x + y + z. \end{cases}$$

On voit que (S') admet une solution (λ, μ) si et seulement si $x + y + z = 0$, ce qui donne une description cartésienne de F:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\}.$$

Pour résumer:

Proposition IV.9. *Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ admet une description cartésienne. Si $p = \dim F$, F s'écrit comme l'ensemble des solutions d'un système homogène sous forme échelonnée réduite à n inconnues et $n - p$ équations.*

En particulier, une droite de $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système homogène sous forme échelonnée à $n - 1$ équations. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - 1$ (un tel sous-espace vectoriel est appelé *hyperplan* de $\mathbb{K}^n$) s'écrit comme l'ensemble des solutions d'une seule équation linéaire homogène. En particulier, un plan de $\mathbb{R}^3$ peut toujours s'écrire comme l'ensemble des (x, y, z) tels que $ax + by + cz = 0$ pour un certain triplet de réels non tous nuls (a, b, c).

B.3. *Calcul du rang d'une famille. Extraction d'une base.* On rappelle que le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour rechercher le rang de $\mathcal{F}$, il suffit donc de trouver une base de $\operatorname{vect}\mathcal{F}$. La démonstration facile de la proposition suivante est laissée au lecteur:

Proposition IV.10. *Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ une famille de vecteurs de E. Soit $\mathcal{F}'$ une des familles suivantes:*

- *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en échangeant les vecteurs $\vec{e}_j$ et $\vec{e}_k$, où $j \neq k$.*
- *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en remplaçant le j-ième vecteur $\vec{e}_j$ par le vecteur $\vec{e}_j + \lambda\vec{e}_k$ où $j \neq k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
- *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en remplaçant le j-ième vecteur $\vec{e}_j$ par le vecteur $\lambda\vec{e}_j$, où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Alors $\operatorname{vect}\mathcal{F} = \operatorname{vect}\mathcal{F}'$.

En d'autres termes, les opérations élémentaires sur les vecteurs ne changent pas $\operatorname{vect}\mathcal{F}$. Lorsque $E = \mathbb{K}^n$, on peut alors trouver une base de $\operatorname{vect}\mathcal{F}$ en appliquant la méthode du pivot de Gauss sur les éléments de $\mathcal{F}$, pour ramener $\mathcal{F}$ à une famille de vecteurs dont le rang est évident.

Exemple IV.11. Considérons la famille de $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\-2\end{bmatrix}\right)$. On applique la méthode du pivot[3] à $\mathcal{F}$:

$$\left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\-4\\-5\end{bmatrix}\right) \qquad \left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\-3\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{array}{ll} (C_3) \leftarrow (C_3) + (C_1) \qquad\qquad & (C_3) \leftarrow (C_3) - (C_2) \\ (C_4) \leftarrow (C_4) - (C_1) & (C_4) \leftarrow (C_4) + 2(C_2). \end{array}$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc de rang 3, et $\operatorname{vect}\mathcal{F}$ a pour base $\left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix}\right)$.

Références

[1] François Liret and Dominique Martinais. *Algèbre 1re annèe - Cours et exercices avec solutions.* Dunod, deuxième edition, 2003.

[2] Tran Van Hiep. *Algèbre, Cours et exercices.* PUF, 1997.

[3] Le lecteur gêné par les opérations sur les colonnes pourra écrire les vecteurs de $\mathcal{F}$ en lignes plutôt qu'en colonnes, et remplacer les opérations élémentaires sur les colonnes par des opérations élémentaires sur les lignes.