L1 — Université
2011-2012 — Paris 13

Algèbre linéaire
Chapitre 4. Applications linéaires

Référence: Liret-Martinais [2].

On notera comme d'habitude $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Applications linéaires et matrices

A. **Définitions. Premières propriétés.**

A.1. *Définition.* Soit E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Définition I.1. Soit f une application de E dans F. On dit que f est une *application linéaire* de E dans F quand les deux conditions suivantes sont respectées:

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \tag{1}$$

$$\forall \vec{x} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}). \tag{2}$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Une application linéaire de E dans E est appelée *endomorphisme* de E. On note pour simplifier $\mathcal{L}(E)$ (au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples I.2.
(i) Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'application $h_\lambda : \vec{x} \mapsto \lambda \vec{x}$ est une application linéaire de E dans E. L'application h_1 est simplement l'identité de E (qui est donc une application linéaire).
(ii) L'application constante nulle, $\vec{x} \mapsto \vec{0}_F$ est une application linéaire de E dans F, notée 0.
(iii) L'application f définie par $f(x, y) = 3x - 4y$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La même formule définit une application linéaire de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ (considérés comme espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ ou comme espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$).
(iv) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$f(2 \times 1) = f(2) = 8 \text{ mais } 2f(1) = 2 \neq 8.$$

A.2. *Quelques propriétés.*

Proposition I.3. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.*

Démonstration.

$$f(\vec{0}_E) = f(0 \times \vec{0}_E) = 0 f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$

□

Proposition I.4. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ des éléments de E. Alors*

$$f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{u}_k) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + \lambda_k f(\vec{u}_k).$$

Démonstration. Si $k = 2$, on démontre la formule en utilisant successivement les conditions (1) et (2) de la définition I.1:

$$f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = f(\lambda_1 \vec{u}_1) + f(\lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \lambda_2 f(\vec{u}_2).$$

Le cas général se démontre par récurrence sur k. □

Corollaire I.5. *On suppose E de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E, et $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ des vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéraire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\forall j = 1 \ldots n, \quad f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j. \tag{3}$$

Démonstration. Supposons que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie (3). Soit $\vec{x}$ un élément de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors par la proposition I.4

$$f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n) = x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_n\vec{v}_n, \tag{4}$$

ce qui montre l'unicité de f vérifiant (3). Pour montrer l'existence, il suffit de définir f par la formule (4): on vérifie aisément que l'application obtenue est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. □

Exemple I.6. Soit $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (2, 4)$. Alors il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(\vec{u}) = (-1, 2, 3)$, $f(\vec{v}) = (0, 0, 0)$. Exercice: donner une expression de f.

B. **Matrices de représentation d'une application linéaire.** Sur les espaces vectoriels de dimension finie, une base de départ et une base de l'espace d'arrivée étant donnée, une application linéaire s'identifie à une matrice.

On rappelle que l'on identifie $\mathbb{K}^n$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes à n lignes: un élément de $\mathbb{K}^n$ sera noté indifféremment $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (cf par exemple la formule (5) plus bas: la première notation est utilisé pour le terme de gauche de la première égalité, la seconde notation est utilisée pour tous les autres termes).

B.1. *Définition.*

Définition I.7. Soit E, F des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement n et p. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La *matrice de représentation de* f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (appelées plus simplement *matrice* de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$), notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est la matrice $p \times n$ dont le coefficient (i, j) est donné par la i-ème coordonnée de $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. En d'autres termes, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est donnée par les coordonnées de $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

B.2. *Exemple: cas des bases canoniques.* Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Alors:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

On peut donc facilement reconnaître une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$: chacune de ses coordonnées dans $\mathbb{K}^p$ est donnée, comme dans (5), par une combinaison linéaire de coordonnées dans $\mathbb{K}^n$. De plus, on lit sur cette formule les coefficients de la matrice de l'application linéaire dans les bases canoniques:

Exemple I.8. La formule

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\pi x_1 + 4x_3 + x_5, ix_3 + \sqrt{2}x_4 + x_5, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4) \tag{6}$$

que l'on peut encore écrire:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} \pi x_1 + 4x_3 + x_5 \\ ix_3 + \sqrt{2}x_4 + x_5 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

définit une application linéaire de $\mathbb{C}^5$ dans $\mathbb{C}^4$. Sa matrice dans les bases canoniques est:

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & \sqrt{2} & 1 \\ -11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

B.3. *Cas général.* Donnons un exemple de calcul de matrice de représentation dans des bases canoniques.

Exemple I.9. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ défini par

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, où

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Calculons

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

La formule (8) nous donne:

$$f(\vec{u}_1) = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{u}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Il reste à exprimer $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Notons (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de $f(\vec{u}_1)$ dans cette base. Alors:

$$f(\vec{u}_1) = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 \iff \begin{cases} 7 = x_1 + x_2 + x_3 \\ -1 = x_1 + x_2 \\ 4 = x_1 \end{cases}$$

Ce système linéaire est sous forme échelonnée. On obtient immédiatement

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 8.$$

D'où

$$f(\vec{u}_1) = 4\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 8\vec{v}_3. \tag{9}$$

La même méthode donne:

$$f(\vec{u}_2) = -6\vec{v}_1 + 9\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3. \tag{10}$$

En combinant (9) et (10), on obtient:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 9 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que cette matrice est complètement différente de la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, qui se lit sur la formule (8).

Comme le montre l'exemple précédent, le calcul de la matrice de représentation d'une application linéaire f dans les bases $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ se décompose en deux étapes:

(i) le calcul de $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)$;

(ii) le calcul des coordonnées de $f(\vec{u}_1)$,..., $f(\vec{u}_n)$ dans la base $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ (soit la résolution de n systèmes linéaires, à p équations et p inconnues chacun).

B.4. *Applications linéaires et mutliplication par une matrice.* La proposition suivante donne une façon plus concrète d'interpréter $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Proposition I.10. *Sous les conditions de la définition I.7, on se donne un vecteur $\vec{x}$ de E de coordonnées $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{C}$. Alors*

$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\, X.$$

Démonstration. Notons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n) &= x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_n f(\vec{u}_n) \\ &= x_1\left(\sum_{j=1}^{p} a_{j1}\vec{v}_j\right) + x_2\left(\sum_{j=1}^{p} a_{j2}\vec{v}_j\right) + \ldots + x_n\left(\sum_{j=1}^{p} a_{jn}\vec{v}_j\right) \end{aligned}$$

En regroupant les termes de la dernière ligne de l'inégalité précédente, on voit que pour $j = 1 \ldots p$, la coordonnée y_j de $\vec{v}_j$ est donnée par

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k,$$

ce qui signifie bien que $Y = AX$ au sens du produit matriciel. □

Exemple I.11. Reprenons l'application linéaire f de l'exemple I.9. Les coordonnées de $f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ dans la base $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ sont données par le produit matriciel:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 9 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

En d'autres termes:

$$f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 14\vec{v}_3.$$

En identifiant $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ définit une application linéaire

$$X \mapsto AX$$

de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$. En fait, toute application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ est de cette forme:

Proposition I.12. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Alors f est l'application linéaire*

$$X \mapsto AX.$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la proposition I.10. Si X est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (respectivement de $\mathbb{R}^p$), le vecteur de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^p$) est également X! □

Exemple I.13. L'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$ est l'application $X \mapsto AX$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Avertissement I.14. On a donc identifié, à l'aide des matrices de représentation dans les bases canoniques, $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^p)$ à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Il est conseillé au lecteur de ne pas abuser de cette identification et de se souvenir qu'il existe d'autre bases que les bases canoniques, et donc d'autres matrices de représentations d'un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^p)$ que celles dans les bases canoniques.

C. **Opérations sur les applications linéaires.**

C.1. *Opérations linéaires.*

Définition I.15. Soit $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$, $\lambda\in\mathbb{K}$. On définit les applications $f+g$ et λf de E dans F par:

$$(f+g)(\vec{x})=f(\vec{x})+g(\vec{x}),\quad (\lambda f)(\vec{x})=\lambda f(\vec{x}).$$

Dans les deux égalités de la ligne précédente, l'addition et la multiplication par λ apparaissant dans le membre de droite de chaque égalité sont l'addition et la multiplication par λ de l'espace vectoriel F.

Proposition I.16. (i) *Si $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$, les applications $f+g$ et λf données par la définition I.15 sont des éléments de $\mathcal{L}(E,F)$.*

(ii) *L'addition et la multiplication par un scalaire ainsi définies confèrent à $\mathcal{L}(E,F)$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'élément neutre de cet espace vectoriel est la fonction constante égale à $\vec{0}_F$.*

Démonstration. Démontrons le point (i). Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de E. En utilisant successivement la définition de $f+g$, la linéarité de f et g, la commutativité de l'addition sur F puis à nouveau la définition de $f+g$, on obtient:

$$(f+g)(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x}+\vec{y})+g(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})+g(\vec{x})+g(\vec{y})=f(\vec{x})+g(\vec{x})+f(\vec{y})+g(\vec{y})=(f+g)(\vec{x})+(f+g)(\vec{y}).$$

De même, si $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$(f+g)(\lambda\vec{x})=f(\lambda\vec{x})+g(\lambda\vec{x})=\lambda f(\vec{x})+\lambda g(\vec{x})=\lambda(f(\vec{x})+g(\vec{x}))=(\lambda(f+g))(\vec{x}).$$

Donc $f+g\in\mathcal{L}(E,F)$. La démonstration du fait que μf est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ si $\mu\in\mathbb{K}$ est très proche et laissée au lecteur.

Pour démontrer le point (ii), on vérifie facilement les 7 conditions de la définition d'un espace vectoriel, en utilisant la définition de λf et $f+g$ et la structure d'espace vectoriel sur F.

Par exemple, si $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, alors pour $\vec{x}\in E$,

$$(\lambda(f+g))(\vec{x})=\lambda(f+g)(\vec{x})=\lambda(f(\vec{x})+g(\vec{x}))=\lambda f(\vec{x})+\lambda g(\vec{x})=(\lambda f)(\vec{x})+(\lambda g)(\vec{x}),$$

ce qui montre que $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$. La preuve des autres conditions est laissée au lecteur. □

Exemple I.17. Soit $f,g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ définis par

$$f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}2x_1-x_2\\x_1+x_2\\0\end{bmatrix},\quad g(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}x_2-2x_1\\0\\x_2\end{bmatrix}.$$

Alors:

$$(2f)(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}4x_1-2x_2\\2x_1+2x_2\\0\end{bmatrix}$$

et

$$(f+g)(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}0\\x_1+x_2\\x_2\end{bmatrix}.$$

C.2. *Composition de deux applications linéaires.* On rappelle que si E, F et G sont des ensembles, f est une application de E dans F et g est une application de F dans G, la *composée* de f et g, noté $g \circ f$, est définie par

$$\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

C'est un application de E dans G.

Proposition I.18. *Soient E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.*

Démonstration. Si $\vec{x}, \vec{y} \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$g \circ f(\vec{x} + \vec{y}) = g(f(\vec{x} + \vec{y})) = g(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y})) = (g \circ f)(\vec{x}) + (g \circ f)(\vec{y}).$$

et

$$g \circ f(\lambda \vec{x}) = g(f(\lambda \vec{x})) = g(\lambda f(\vec{x})) = \lambda (g \circ f(\vec{x})).$$

□

Exercice I.19. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ donnés par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ et $g(x) = (x, -2x, 3x)$. Calculer $g \circ f$.

C.3. *Effet des opérations sur les matrices.* Les opérations sur les applications linéaires se traduisent facilement en terme de matrices de représentations:

Proposition I.20. (i) *Soit E, F des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des bases de E et F respectivement. Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors:*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f_1) + \mu \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f_2).$$

(ii) *Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des bases de E, F et G respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors:*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Le point (ii) signifie que la composition des applications se traduit par le produit matriciel de leurs matrices de représentations. Remarquons que le produit matriciel de la dernière ligne de la proposition est bien défini: si $n = \dim E$, $p = \dim F$ et $q = \dim G$, le premier facteur est une matrice $q \times p$, le deuxième une matrice $p \times n$. Le produit obtenu est bien une matrice $q \times n$.

Démonstration. Nous ne démontrerons que le point (ii). La preuve (plus facile) du point (i) est laissée au lecteur. On note:

$$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n), \quad \mathcal{C} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p), \quad \mathcal{D} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q)$$
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}, \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Alors:

$$(g \circ f)(\vec{u}_j) = g\left(\sum_{k=1}^{p} a_{kj} \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} g(\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} \sum_{i=1}^{q} b_{ik} \vec{w}_i = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj}\right) \vec{w}_i.$$

La i-ème coordonnée de $(g \circ f)(\vec{u}_j)$ dans la base $\mathcal{D}$ est donc exactement

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj},$$

ce qui montre la formule annoncée au vue de la définition du produit de deux matrices. □

Remarque I.21. Le (ii) justifie a posteriori la définition du produit matriciel.

Exercice I.22. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$. On suppose

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)$.

b. La matrice AB est-elle la matrice de représentation d'une certaine application linéaire dans des bases que l'on précisera?

Solution.

a. Par la proposition I.20,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. On a envie de dire que AB est une matrice de représentation de l'application $f \circ g$. Mais

$$AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g),$$

la base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme l'"espace d'arrivée" de g n'est donc pas la même que la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme "espace de départ" de f. Le produit AB n'a donc pas d'interprétation particulière en terme de composition d'applications linéaires.

D. **Changement de bases.**

D.1. *Position du problème.* Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On se donne deux bases de E, $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ et deux bases de F, $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$. Peut-on exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ en fonction de $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$? On commence par donner un exemple concret.

D.2. *Exemple.* On suppose $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\widetilde{\mathcal{B}} = (\vec{\tilde{u}}_1, \vec{\tilde{u}}_2)$, $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, $\widetilde{\mathcal{C}} = (\vec{\tilde{v}}_1, \vec{\tilde{v}}_2, \vec{\tilde{v}}_3)$ avec

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\tilde{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\tilde{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\tilde{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\tilde{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\tilde{v}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On suppose de plus

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

On chercher à calculer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$.

Première étape. On commence par calculer $f(\vec{\tilde{u}}_1)$ et $f(\vec{\tilde{u}}_2)$. Puisqu'on connaît $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$, il suffit de trouver les coordonnées de $\vec{\tilde{u}}_1$ et $\vec{\tilde{u}}_2$ dans la base $\mathcal{B}$. On a:

$$\vec{\tilde{u}}_1 = \vec{u}_1 \text{ et } \vec{\tilde{u}}_2 = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2$$

(la deuxième égalité s'obtient par résolution du système $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 0$). Donc, en utilisant l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$,

$$f(\vec{\tilde{u}}_1) = f(\vec{u}_1) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3,$$

$$f(\vec{\tilde{u}}_2) = \frac{1}{2}f(\vec{u}_1) + \frac{1}{2}f(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\left(-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3\right) = \vec{v}_2 + \frac{5}{2}\vec{v}_3.$$

Deuxième étape. On a obtenu les coordonnées de $f(\vec{\tilde{u}}_1)$ et $f(\vec{\tilde{u}}_2)$ dans la base $\mathcal{C}$. On a besoin des coordonnées de ces vecteurs dans la base $\widetilde{\mathcal{C}}$. Il suffit pour cela d'écrire les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ en fonction de $\vec{\tilde{v}}_1$, $\vec{\tilde{v}}_2$ et $\vec{\tilde{v}}_3$. En résolvant pour chaque vecteur un système linéaire (dans ce cas précis, échelonné) de trois équations à trois inconnues, on obtient

$$\vec{v}_1 = 2\vec{\tilde{v}}_1 - \vec{\tilde{v}}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{\tilde{v}}_2, \quad \vec{v}_3 = -\vec{\tilde{v}}_1 + \vec{\tilde{v}}_3.$$

D'où, en utilisant la première étape,

$$f(\tilde{\vec{u}}_1) = -(2\tilde{\vec{v}}_1 - \tilde{\vec{v}}_2) + 2\tilde{\vec{v}}_2 + 3(\tilde{\vec{v}}_3 - \tilde{\vec{v}}_1) = -5\tilde{\vec{v}}_1 + 3\tilde{\vec{v}}_2 + 3\tilde{\vec{v}}_3,$$

et

$$f(\tilde{\vec{u}}_2) = \tilde{\vec{v}}_2 + \frac{5}{2}(-\tilde{\vec{v}}_1 + \tilde{\vec{v}}_3) = -\frac{5}{2}\tilde{\vec{v}}_1 + \tilde{\vec{v}}_2 + \frac{5}{2}\tilde{\vec{v}}_3.$$

On en déduit

$$\operatorname{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Conclusion. Pour déduire $\operatorname{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$ de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, on a eu besoin:

- des coordonnées des vecteurs de la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$;
- des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Ces informations sont données par les *matrices de passage* d'une base à une autre, que nous allons définir maintenant.

D.3. *Matrices de passage.*

Définition I.23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\vec{u}}_1, \tilde{\vec{u}}_2, \dots, \tilde{\vec{u}}_n)$ deux bases de E. La *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$, notée $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$, est la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. En d'autres termes, si l'on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = [p_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, on a

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \tilde{\vec{u}}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{u}_i.$$

Exemple I.24. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ la famille

$$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right).$$

On vérifie facilement que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base canonique. On obtient donc, sans calcul:

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exemple I.25. On reprend les notations de l'exemple de la sous-partie D.2. Alors, d'après la première étape de cet exemple:

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

D'après la deuxième étape:

$$\operatorname{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition I.26. *Sous les hypothèses de la définition précédente, on note*

$$P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

Soit $\vec{x} \in E$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *ses coordonnées dans* $\mathcal{B}$ *et* $\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}$ *ses coordonnées dans* $\widetilde{\mathcal{B}}$. *Alors*

$$X = P\widetilde{X}.$$

Démonstration. On a

$$\vec{\tilde{x}} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \vec{\tilde{u}}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \tilde{x}_j \right) \vec{u}_i,$$

et donc

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \tilde{x}_j,$$

ce qui montre la formule annoncée. □

Avertissement I.27. L'appellation "matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$" peut être source de confusion: la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ transforme les coordonnées d'un vecteur dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ en celles de ce même vecteur dans $\mathcal{B}$ (et non l'inverse, comme on pourrait s'y attendre).

Le lecteur pourra vérifier que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ est en fait la matrice de représentation, dans la base $\mathcal{B}$, de l'application linéaire qui envoie les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans ceux de $\widetilde{\mathcal{B}}$, ce qui explique son nom:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f), \quad f \in \mathcal{L}(E,E), \quad \forall i = 1\dots n,\ f(\vec{u}_i) = \vec{\tilde{u}}_i.$$

Corollaire I.28. *Toute matrice de passage est inversible. De plus:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \left(\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

Démonstration. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ et Q la matrice de passage de $\widetilde{\mathcal{B}}$ à $\mathcal{B}$. Alors, si $\vec{x} \in E$ a pour coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ et $\widetilde{X}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}$, on a, par la proposition I.26:

$$QX = \widetilde{X} \text{ et } X = P\widetilde{X}.$$

D'où

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, \quad X = PQX.$$

On en déduit que l'application linéaire $X \to PQX$ est l'identité de $\mathbb{K}^n$, c'est à dire:

$$PQ = I_n.$$

□

Exemple I.29. On revient à l'exemple de la sous-partie D.2. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En d'autres termes,

$$\vec{u}_1 = \vec{\tilde{u}}_1 \text{ et } \vec{u}_2 = -\vec{\tilde{u}}_1 + 2\vec{\tilde{u}}_2,$$

ce que l'on peut vérifier par un calcul direct à l'aide des expressions de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{\tilde{u}}_1$ et $\vec{\tilde{u}}_2$.

De même, en calculant l'inverse de la matrice $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}$, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Théorème I.30 (Formule de changement de bases)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ des bases de E, $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ des bases de F. Alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) &= \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \\ &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

Démonstration. Ceci découle de la formule de changement de coordonnées de la proposition I.26.

Soit $\vec{x} \in E$, X le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et $\widetilde{X}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{B}}$. Alors, par la proposition I.26, les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans $\mathcal{C}$ sont:

$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\,\widetilde{X}$$

et les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ sont donc:

$$\widetilde{Y} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\,\widetilde{X}.$$

Or par définition de $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$,

$$\widetilde{Y} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)\widetilde{X}.$$

On a donc:

$$\forall \widetilde{X} \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\,\widetilde{X} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)\widetilde{X},$$

ce qui montre comme annoncé:

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f).$$

□

Remarque I.31. On peut résumer le théorème I.30 par le schéma suivant

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)"] & (F,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q^{-1}"] \\
(E,\widetilde{\mathcal{B}}) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)"'] & (F,\widetilde{\mathcal{C}})
\end{tikzcd}$$

où $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$ permet de passer des coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ aux coordonnées dans $\mathcal{B}$, et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}}$ permet de passer des coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ aux coordonnées dans $\mathcal{C}$ (cf proposition I.26).

Exemple I.32. On revient à l'exemple précédent. On a:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

On en déduit, par le théorème I.30, puis un calcul simple de produits matriciels:

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

On retrouve bien le résultat de la sous-partie D.2.

Remarque I.33. Comme le montre l'exemple précédent, on peut calculer la matrice $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}$ à partir de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ sans utiliser (ni même connaître) explicitement la formule de changement de bases. La formule de changement de base doit être absolument connue, mais la méthode de la sous-partie D.2 est tout à fait valable pour appliquer un changement de bases à la matrice d'un endomorphisme.

II. Applications linéaires et espaces vectoriels

A. **Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel.** Commençons par rappeler la définition de l'image et de l'image réciproque d'un ensemble par une application:

Définition II.1. Soit f une application de E dans F, où E et F sont des ensembles.

(i) Si $A \subset E$, l'*image* de A par f, notée $f(A)$, est le sous-ensemble de F:

$$f(A) = \Big\{ f(a), \quad a \in A \Big\} = \Big\{ b \in F, \text{ t.q. } \exists a \in E, \; b = f(a) \Big\}.$$

(ii) Si $B \subset F$, l'*image réciproque*[1] de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est le sous-ensemble de E:

$$f^{-1}(B) = \{a \in E \text{ t.q. } f(a) \in B\}.$$

Avertissement II.2. La notation $f^{-1}(B)$ ne signifie pas que f est bijective et admet une application réciproque f^{-1}. L'ensemble $f^{-1}(B)$ est défini pour tout application f de E dans F, dès que B est un sous-ensemble de F. Par ailleurs, on n'a pas toujours $f(f^{-1}(B)) = B$ ou $f^{-1}(f(A)) = A$ (cf l'exercice suivant).

Exercice II.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction cosinus $x \mapsto \cos x$. Calculer $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([-1, 1])$, $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}(\{0\})$, $f([0, \pi])$, $f([0, \pi/2])$, $f(\{0\})$, puis $f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right)$ et $f^{-1}\left(f([0, \pi])\right)$.

Définition II.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'image $f(E)$ de E par f est appelée aussi *image de* f et notée $\mathrm{Im}(f)$. L'image réciproque $f^{-1}(\vec{0}_F)$ de $\{\vec{0}_F\}$ par f est appelée *noyau de* f et notée[2] $\mathrm{Ker}(f)$.

Remarque II.5. En d'autres termes, l'image de f est l'ensemble:

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in F, \text{ t.q. } \exists \vec{x} \in E, \; \vec{y} = f(\vec{x})\},$$

et le noyau de f est l'ensemble:

$$\mathrm{Ker}(f) = \Big\{ \vec{x} \in E \text{ t.q. } f(\vec{x}) = \vec{0}_F \Big\}.$$

Théorème II.6. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(i) *L'image d'un sous-espace vectoriel de E par f est un sous-espace vectoriel de F.*

(ii) *L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par f est un sous-espace vectoriel de E.*

En particulier, le noyau et l'image de f sont des sous-espaces vectoriels (de E et F respectivement).

Démonstration. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors $\vec{0}_E \in G$, donc $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E) \in f(G)$.

Soit maintenant $\vec{u}, \vec{v} \in f(G)$. Par définition de $f(G)$, il existe des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de G tels que $\vec{u} = f(\vec{x})$ et $\vec{v} = f(\vec{y})$. On a

$$\vec{u} + \vec{v} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}).$$

Puisque G est un sous-espace vectoriel de E, $\vec{x} + \vec{y} \in G$ et on déduit de l'égalité précédente $\vec{u} + \vec{v} \in f(G)$.

Si de plus $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda\vec{x} \in G$ et donc

$$\lambda\vec{u} = \lambda f(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) \in f(G),$$

ce qui achève de montrer que $f(G)$ est bien un sous-espace vectoriel de F.

Montrons maintenant le deuxième point. Soit H un sous-espace vectoriel de F. Alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in H$, et donc $\vec{0}_E \in f^{-1}(H)$. De plus, si $\vec{u}, \vec{v} \in f^{-1}(H)$. Alors

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),$$

et puisque $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ sont dans H et H est un sous-espace vectoriel de F, $f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \in H$, ce qui montre que $\vec{u} + \vec{v} \in f^{-1}(H)$.

---

[1] Le lecteur pressé pourra faire l'impasse en première lecture sur cette notion d'image réciproque, qui sera surtout utilisée dans la suite pour définir le noyau d'une application linéaire (cf la remarque II.5 plus bas qui donne une définition du noyau sans utiliser cette notion).

[2] de l'allemand *Kern* signifiant noyau.

Enfin, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} \in f^{-1}(H)$, alors $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ est un élément de H puisque $f(\vec{u})$ est un élément de H. Donc $\lambda\vec{u} \in f^{-1}(H)$. On a bien démontré que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple II.7. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{t.q. } x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0\Big\}.$$

Alors A est le noyau de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple II.8. Soit B le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \Big\{(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\Big\}.$$

Alors B est l'image de l'application linéaire $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2).$$

Donc A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice II.9. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ des triplets $(x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_1 - x_3)$ tels que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ et $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_1 - x_3).$$

D'après la sous-partie B.2 ci-dessus, f est une application linéaire. Soit

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. On a

$$A = f(G),$$

et donc A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

B. **Injectivité et surjectivité, lien avec l'image et le noyau.**

B.1. *Injection, surjection: rappels.*

Rappel II.10. Soit A et B deux ensembles et f une application de A dans B.

(i) On dit que f est *injective* lorsque tous les éléments dans l'ensemble d'arrivée ont au plus un antécédent dans l'ensemble de départ, i.e:

$$\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Ce qui peut encore se lire:

$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

(deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes).

(ii) On dit que f est *surjective* lorsque tous les éléments dans l'ensemble d'arrivée ont au moins un antécédent dans l'ensemble de départ, i.a.

$$\forall z \in B,\ \exists x \in A,\ \text{t.q. } z = f(x).$$

(iii) On dit que f est *bijective* lorsqu'elle est injective et surjective. C'est à dire:

$$\forall z \in B,\ \exists! x \in A,\ \text{t.q. } z = f(x).$$

Si f est bijective, on appelle application réciproque de f, et on note f^{-1} l'application de B dans A qui à z associe l'unique x de A tel que $f(x) = z$.

Exemple II.11. L'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas injective: si $(-1)^2 = 1^2$ et $-1 \neq 1$. Elle n'est pas surjective: il n'existe aucun réel x tel que $x^2 = -1$.

L'application $x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, d'application réciproque $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

Avertissement II.12. La notion d'injectivité dépend du choix de l'espace de départ. Les notions de surjectivité et de bijectivité dépendent des espaces de départ et d'arrivée. Par exemple, l'application $f : x \mapsto x^2$ est bijective de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, surjective (mais pas injective) de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$, injective (mais pas surjective) de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

B.2. *Applications linéaires injectives et surjectives.*

Théorème II.13. *Soit E, F deux espaces vectoriels (de dimension finie ou non) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:*

(i) *f est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.
(ii) *f est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Démonstration. Le point (i) découle immédiatement de la définition de la surjectivité et de celle de l'image d'une application linéaire.

Démontrons (ii).

Supposons f injective. Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$, et donc par injectivité $\vec{x} = \vec{0}_E$. D'où $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

Réciproquement, on suppose $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de E tels que $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$. Alors

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}_F,$$

donc $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}(f)$, et, puisque $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_E$. On a bien montré que f était injective. □

Exemple II.14. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 2x_3, 4x_3).$$

Alors f est injective. En effet, si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - x_3 = 4x_3 = 0$, dont on déduit facilement $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

B.3. *Applications linéaires et base.* On peut également caractériser l'injectivité ou la surjectivité d'une application par des propriétés de l'image d'une base de l'espace de départ.

Proposition II.15. *Soit E et F des espaces vectoriels tel que E est de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:*

(i) *La famille $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ engendre* $\mathrm{Im}(f)$. *En particulier, l'application f est surjective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de F.*
(ii) *L'application f est injective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille libre.*

Démonstration. Montrons le point (i).

Les vecteurs $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ sont bien dans $\mathrm{Im}(f)$. De plus, un vecteur $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$ s'écrit $f(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in E$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \quad \vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n),$$

ce qui montre bien

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)).$$

On en déduit immédiatement:

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F \iff \mathrm{vect}(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)) = F,$$

Montrons maintenant (ii). L'application f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$, i.e.

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = \vec{0}_F \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}_E$$

ou, en utilisant que $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E:

$$f(\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n) = \vec{0}_F \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Par linéarité de f, on peut réécrire la propriété précédente:

$$\lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \lambda_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_F \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

L'injectivité de f est donc bien équivalent à la liberté de la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n))$. $\square$

C. **Rang d'une application linéaire.** On suppose ici que E est un espace vectoriel de dimension finie.

C.1. *Définition.* D'après le point (i) de la proposition II.15, si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de l'image de f, ce qui montre que l'image de f est de dimension finie, inférieure ou égale à la dimension de E.

Définition II.16. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Le *rang* de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, est la dimension de l'image de f. Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}$, le rang de A est le rang de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Remarque II.17. Le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est donc égal au rang de la famille de vecteurs

$$(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)).$$

De même, le rang d'une matrice A est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Exemple II.18. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2(x_1 + 2x_2 + x_3) \\ -(x_1 + 2x_2 + x_3) \end{bmatrix}.$$

Alors $f(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 4, -2)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 2, -1)$. Donc

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = 1.$$

C.2. *Théorème du rang.*

Théorème II.19 (Théorème du rang)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E de dimension finie. Alors*

$$\mathrm{rg}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E.$$

Démonstration. Soit k la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, et ℓ la dimension de $\mathrm{Im}\, f$. On doit montrer

$$\dim E = k + \ell.$$

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_\ell)$ une base de $\mathrm{Im}\, f$. Il existe donc, pour $j = 1 \ldots \ell$, un vecteur $\vec{w}_j \in E$ tel que $f(\vec{w}_j) = \vec{v}_j$. Montrons que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_\ell)$ est une base de E (ce qui impliquera immédiatement le résultat annoncé).

(i) Montrons que $\mathcal{B}$ engendre E.

Soit $\vec{x} \in E$. Puisque $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im}\, f$ et $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell$ est une base de f, il existe $(y_1, y_2, \ldots, y_\ell) \in \mathbb{K}^\ell$ tels que

$$f(\vec{x}) = y_1 \vec{v}_1 + \ldots + y_\ell \vec{v}_\ell.$$

On en déduit

$$f(\vec{x}) = y_1 f(\vec{w}_1) + \ldots + y_\ell f(\vec{w}_\ell) = f(y_1 \vec{w}_1 + \ldots + y_\ell \vec{w}_\ell),$$

et donc

$$\vec{x} - y_1 \vec{w}_1 - \ldots - y_\ell \vec{w}_\ell \in \mathrm{Ker}(f).$$

Il existe donc $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{K}^k$ tels que

$$\vec{x} - y_1 \vec{w}_1 - \ldots - y_\ell \vec{w}_\ell = x_1 \vec{u}_1 + \ldots + x_k \vec{u}_k,$$

soit

$$\vec{x} = y_1 \vec{w}_1 + \ldots + y_\ell \vec{w}_\ell + x_1 \vec{u}_1 + \ldots + x_k \vec{u}_k.$$

La famille $\mathcal{B}$ engendre bien E.

(ii) Montrons que $\mathcal{B}$ est libre.

On suppose que l'on a

$$x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_k\vec{u}_k + y_1\vec{w}_1 + \ldots + y_\ell\vec{w}_\ell = \vec{0}_E \tag{11}$$

avec $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell) \in \mathbb{K}^{k+\ell}$. En appliquant f à la ligne précédente et en utilisant que $f(\vec{u}_j) = \vec{0}_F$ pour $j = 1 \ldots k$ et $f(\vec{w}_j) = \vec{v}_j$ pour $j = 1 \ldots \ell$, on obtient

$$y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \ldots + y_\ell\vec{v}_\ell = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$

On en déduit, puisque la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_\ell)$ est libre:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_\ell = 0.$$

En revenant à (11), et en utilisant que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ est libre, on obtient

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{B}$ est libre et termine la preuve du théorème du rang. □

Exercice II.20. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4).$$

Calculer le rang de f.

Solution. On calcule la dimension du noyau de f.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker}(f) \iff x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = 2x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_3 - x_4 = 0.$$

On résout facilement ce système linéaire homogène de 5 équations:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker}(f) \iff x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Le noyau de f est de dimension 0. Par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 4 - 0 = 4.$$

Remarque II.21. En dimension finie, on peut souvent utiliser le théorème du rang et des arguments de dimension pour étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application. Reprenons l'application injective f de l'exemple précédente. Le théorème du rang s'écrit:

$$\operatorname{rg}(f) + \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(f)}_{0} = \underbrace{\dim \mathbb{C}^3}_{3},$$

et donc $\operatorname{rg}(f) = 3$. On en déduit que $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{C}^3$, c'est donc exactement $\mathbb{C}^3$. Donc f est surjective, et par conséquent bijective.

C.3. *Rang et systèmes linéaires.* L'image et le noyau d'une application linéaire s'interprète en terme de systèmes linéaires On considère un système linéaire non-homogène à p équations et n inconnues:

$$(S) \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = b_2 \\ \qquad\vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j = b_p, \end{cases}$$

et le système linéaire homogène correspondant, à p équations et n inconnues:

$$(H)\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = 0\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = 0\\ \qquad\vdots\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j = 0.\end{cases}$$

Alors:

Proposition II.22. *Fixons les coefficients a_{ij} Soit H l'ensemble des solutions de (H) et F le sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$ formé des $(b_1,\dots,b_p)$ tel que (S) a au moins une solution. Alors H et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ respectivement et*

$$\dim H + \dim F = n.$$

Démonstration. L'ensemble des F solutions de (H) est le noyau $\operatorname{Ker} f$ de l'application linéaire $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ de matrice $[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. L'ensemble F est l'image de f. Ceci montre que H et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ respectivement. L'égalité sur les dimensions découle du théorème du rang. $\square$

D. **Isomorphismes.**

D.1. *Définition.* Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Définition II.23. On appelle *isomorphisme* entre E et F une application linéaire bijective de E dans F. Lorsqu'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes. On appelle *automorphisme* de E un isomorphisme de E dans lui-même. Un automorphisme est donc un endomorphisme bijectif.

Exemple II.24. L'application linéaire f de l'exemple II.14 est, par la remarque II.21 un isomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$, donc un automorphisme de $\mathbb{C}^3$.

Exemple II.25. L'identité de E est un automorphisme de E (donc E est isomorphe à lui même).

Le fait que deux espaces vectoriels sont isomorphes signifie qu'ils ont exactement la même structure d'espace vectoriel: ce sont en quelques sortes deux copies du même espace vectoriel.

D.2. *Application réciproque d'un isomorphisme.*

Proposition II.26. *Soit E et F des espaces vectoriels et f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est une application linéaire (donc un isomorphisme) de F dans E.*

Remarque II.27. Il découle de la proposition II.26 que la relation "E est isomorphe à F" est symétrique i.e.:

$$E \text{ isomorphe à } F \iff F \text{ isomorphe à } E.$$

Exercice II.28. Vérifier que c'est aussi une relation transitive, i.e.:

$$\Big(E \text{ isomorphe à } F \text{ et } F \text{ isomorphe à } G\Big) \Longrightarrow E \text{ isomorphe à } G.$$

Démonstration de la proposition. L'application réciproque d'une application bijective est également bijective. Si f^{-1} est une application linéaire, c'est bien aussi un isomorphisme. Montrons que f^{-1} est linéaire.

Soit $\vec{x}, \vec{y} \in F$. Alors (par définition de l'application réciproque):

$$f(f^{-1}(\vec{x}+\vec{y})) = \vec{x}+\vec{y}.$$

De plus

$$f\left(f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y})\right) = f\left(f^{-1}(\vec{x})\right)+f\left(f^{-1}(\vec{y})\right) = \vec{x}+\vec{y}.$$

En combinant ces deux lignes, on obtient:

$$f(f^{-1}(\vec{x}+\vec{y})) = f\left(f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y})\right),$$

et donc, par injectivité de f,

$$f^{-1}(\vec{x}+\vec{y}) = f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y}).$$

On démontre de même que si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f^{-1}(\lambda\vec{x}) = \lambda f^{-1}(\vec{x})$. □

Exemple II.29. Soit f l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2).$$

Calculons l'application réciproque de f. Si $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) = f^{-1}(y_1, y_2)$ est l'unique solution du système

$$y_1 = x_1+x_2, \quad y_2 = x_1-x_2.$$

On résout ce système:

$$x_1 = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad x_2 = \frac{y_1-y_2}{2}.$$

On a donc

$$f^{-1}(y_1, y_1) = \left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right).$$

Plus généralement, calculer la réciproque d'un isomorphisme f en dimension finie dans un système de coordonnées revient à résoudre le système de Cramer inhomogène $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, d'inconnues $(x_1, \dots, x_n)$, de second membre $(y_1, \dots, y_n)$.

D.3. *Condition sur les dimensions.*

Proposition II.30. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont de dimension finie.*

(i) *Si f est injective,* $\dim E \leq \dim F$.
(ii) *Si f est surjective,* $\dim E \geq \dim F$.
(iii) *Si f est un isomorphisme,* $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Le point (iii) découle immédiatement des points (i) et (ii).

Si f est injective, le noyau de f est de dimension 0 et le théorème du rang s'écrit $\dim E = \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$. Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, on a $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim F$, et le point (i) en découle.

Supposons maintenant f surjective. Alors $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$, et le théorème du rang d'écrit: $\dim E = \dim F + \dim \mathrm{Ker}(f) \geq \dim F$, ce qui donne le point (ii). □

Remarque II.31. Si $\dim F > \dim E$, il n'existe donc aucune application linéaire surjective de E dans F. De même, si $\dim F < \dim E$, il n'existe aucune application linéaire injective de E dans F.

Exemple II.32. L'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+x_2-\sqrt{2}x_3, x_1-x_2+x_3-x_4, x_2+3x_4, \pi x_1+e^{\pi}x_2+x_3, x_1-\sqrt{7}x_4)$$

n'est pas surjective. En effet, il n'existe aucune application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$.

La proposition suivante est une application immédiate du théorème du rang et sa démonstration est laissée au lecteur.

Proposition II.33. *Soit E et F de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est un isomorphisme.*
(ii) *f est injective et* $\dim E = \dim F$.

(iii) f *est surjective et* $\dim E = \dim F$.

Exemple II.34. Soit $g : \mathbb{R}^6 \to \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_2 + x_3 & x_3 \\ x_4 - x_5 + 2x_6 & x_5 - 3x_6 & x_6 \end{bmatrix}.$$

Alors g est un isomorphisme: on vérifie facilement que $\mathrm{Ker}(g) = \{(0,0,0,0,0,0)\}$, et $\dim \mathbb{R}^6 = 6 = \dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

D.4. *Matrices inversibles et isomorphismes.*

Proposition II.35. *Soit E et F deux espaces de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *l'application f est un isomorphisme de E dans F;*
(ii) $\dim E = \dim F$ *et la matrice A est inversible.*

Sous ces conditions, on a alors:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

Démonstration. Supposons que f est un isomorphisme. Par la proposition II.30, $\dim E = \dim F$. Notons n leur dimension commune.

Par le point (ii) de la proposition I.20,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_n,$$

ce qui montre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible.

Réciproquement, on suppose que $\dim E = \dim F$ et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible. Soit g l'application linéaire de F dans E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^{-1}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = I_n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = I_n,$$

où $n = \dim E = \dim F$, ce qui montre que $f \circ g$ est l'identité de F et $g \circ f$ est l'identité de E: f est donc bijective, d'application réciproque g.

□

D.5. *Isomorphisme entre espaces de mêmes dimensions.* Le théorème suivant est un résultat simple, mais important sur les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie:

Théorème II.36. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Si E et F sont isomorphes, $\dim E = \dim F$ par le point (iii) de la proposition II.30.

Réciproquement, supposons $\dim E = \dim F$, et notons n leur dimension commune. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E, $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ une base de F, et f l'unique application linéaire de E dans F telle que

$$f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j, \quad j = 1 \ldots n$$

(on rappelle que l'on peut définir une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie en donnant l'image d'une base, cf le corollaire I.5). Vérifions que f est injective. Soit $\vec{x}$ un élément de $\mathrm{Ker}(f)$, $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées dans la base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Alors

$$f(\vec{x}) = \vec{0}_F \text{ i.e. } f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n) = \vec{0}_F.$$

En développant le terme de gauche de la dernière égalité par linéarité, et en utilisant que $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$ pour $j = 1 \ldots n$, on obtient

$$x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}_F,$$

et comme la famille $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ est libre,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

On en déduit $\vec{x} = \vec{0}_E$. On a montré $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$, c'est à dire que f est injective. Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(E)$ donc f est surjective. Finalement f est bijective. □

Exemple II.37. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^6$ et $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont isomorphes car tous les deux de dimension 6. Remarquons qu'un isomorphisme évident est donné par: $f : \mathbb{R}^6 \to \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}.$$

Remarque II.38. On peut montrer de la même manière que $\dim E \leq \dim F$ si et seulement si il existe une injection de E dans F, ou encore si et seulement si il existe une surjection de F dans E.

Références

[1] David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications.* troisième édition, 2004.

[2] François Liret and Dominique Martinais. *Algèbre 1re année - Cours et exercices avec solutions.* Dunod, deuxième édition, 2003.