L1, algèbre linéaire
2011/2012
Mathématiques

Université
Paris 13

Quelques exercices calculatoires sur les matrices et les systèmes
Réponses

Exercice 1. Les matrices A et B sont diagonales: elles ne sont inversibles que si tous les coefficients diagonaux sont non nuls. On en déduit que A est inversible et B non inversible. De plus

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-4i}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les matrices C et D sont des matrices 2×2. En utilisant le critère du cours, on voit que C est inversible $(-2 \times 2 - (-1 \times 3) = -1 \neq 0)$ et que D n'est pas inversible. De plus, en utilisant la formule donnée dans le cours, on obtient $C^{-1} = C$.

La matrice F est une matrice 2×2. Elle est inversible si et seulement si $x - 6 \neq 0$ i.e. $x \neq 6$. Dans ce cas

$$F^{-1} = \frac{1}{x-6} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Un calcul direct et les formules trigonométriques donnent $R_\theta R_\sigma = R_{\theta+\sigma}$. Puisque $R_0 = I_3$, on en déduit immédiatement que R_θ est inversible, d'inverse $R_{-\theta}$.

Exercice 3.

$$(S_1) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2x_3 - 3x_4 + 2 \\ x_5 = -3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 4 \end{cases} \qquad (S_3) \text{ pas de solution.} \qquad (S_4) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Exercice 4. La matrice A n'est pas une matrice carrée, elle n'est donc pas inversible.

Les matrices B et C sont inversibles d'inverses

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -11 & -36 \\ -3 & -3 & -11 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice D n'est pas inversible.

Les matrices E et F sont inversibles, avec

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 13 & 4 \\ -5 & 0 & -10 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 21 & 15 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & -6 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$