
Quelques exercices calculatoires sur les matrices et les systèmes

Exercice 1. Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en fonction du paramètre } x \in \mathbb{C}.$$

Exercice 2. Soit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice 3×3

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $R_\theta R_\sigma$ pour $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$.

b) La matrice R_θ est-elle inversible? Si oui calculer son inverse.

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1) \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -6 \\ 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -9 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 8 \\ -3x_1 - 9x_2 - 15x_3 - 2x_4 = 30 \\ -3x_1 - 5x_2 - 11x_3 + 12x_4 = 24 \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 3x_5 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = -13 \\ x_1 - x_5 = -1 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

Exercice 4. En utilisant la méthode du pivot, dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & -0.5 & -1.5 \\ 0.5 & -1 & -0.5 & -1.5 \\ 0.5 & 0 & 1.5 & 4.5 \\ 0.5 & 2 & -0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -6 & -0 \\ -2 & -3 & -1.5 & 0.5 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2.5 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$