L1, algèbre linéaire
2011/2012
Mathématiques

Université Paris 13

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. Déterminer quatre solutions (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation $x + y - 2z = 1$. Décrire toutes les solutions de cette équation.

Exercice 2. Déterminer dans l'ensemble des complexes deux solutions du système d'inconnues x, y et z:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2iy = -1. \end{cases} \tag{1}$$

Donner l'ensemble des solutions de ce système.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y et z:

$$(a) \begin{cases} 4y - 4x - z = 0 \\ 16y - 17x + 4z = 8 \\ x + y + 3z = -5 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} -z + y - x = 0 \\ 4x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y - 2x = 3 \\ -2y + 3x = 0,5 \end{cases} \qquad (d) \{x = 2 \qquad (e) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ -2x + y + 7z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les quatre points $A(-1; 6)$, $B(2; 3)$, $C(0,5; 0)$ et $D(-2; 8)$. Déterminer les courbes d'équations $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points:

- A
- A et B
- A, B et C
- A, B, C et D.

Matrices, formes réduites

Exercice 5. Donner pour chacune des matrices A_j le système linéaire (S_j) dont A_j est la matrice augmentée. La matrice A_j est-elle sous forme échelonnée? Sous forme échelonnée réduite? Mettre (si ce n'est pas le cas) A sous forme échelonnée réduite, puis résoudre (S_j).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 3 & -6 & -3 \\ 4 & 8 & 4 & 4 & -8 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & -6 & -9 \\ -3 & -6 & -3 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Ecrire la matrice augmentée de chacun des systèmes suivants, puis le résoudre à l'aide de la méthode du pivot.

$$(a)\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x+2y+3z+t=2 \\ 2x+2y+z+t=0 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -x+y+2z=-2 \\ 3x+4y+z=6 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} y+2x+z=5 \\ -7z+2x+13y=-1 \\ x+\dfrac{3}{2}z-y=1 \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} -2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=-2 \end{cases}$$

Exercice 7. Pour chacune des matrices A_j suivantes dire **sans aucun calcul** si le système dont A_j est la matrice augmentée a une solution, aucune solution ou une infinité de solutions:

$$\begin{pmatrix} 3 & -14 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ -\frac{2}{17} & 3,5 & 0,1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 1,1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Systèmes avec paramètres

Exercice 8.

a) Pour quel paramètre réel p les trois droites d'équations $x+y=1$, $x+2y=2$ et $x+3y=p$ ont-elles un point d'intersection?

b) Même question pour les droites d'équations $2px+3y=6$, $4x-3y=12$ et $6x-5y=20$.

Exercice 9. Résoudre les systèmes d'inconnues complexe x, y et z et de paramètre complexe m:

$$(a)\quad (m^2-1)x+2y+2m=0 \qquad (b)\begin{cases} x-y+z=m \\ mx+y-z=1 \\ x-y+mz=1 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$$

Exercice 10. Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction des paramètres réels a, b et c:

$$(a)\begin{cases} ay+z=2 \\ 2x+5y=1 \\ -2x+y+bz=3 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} ax+by+z=1 \\ ax+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} ax+by=a+b \\ bx+ay=a+b \\ x+y=c \end{cases}$$

Suggestions d'exercices supplémentaires. David C. Lay *Algèbre linéaire, théorie, exercices & applications* chez De Boeck, exercices des chapitres 1.1 et 1.2.

Tran Van Hiep *Algèbre. Cours et exercices* aux PUF, exercices du chapitre 5.