Matrices
TD n°2

1. On donne les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$U=\begin{pmatrix} -7 & 4 & \sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

a. Calculer, si c'est possible, $C+E$; $A+C$; AC ; CA ; $-7CD$.
b. Calculer les coefficients de la matrice H définie par la combinaison linéaire suivante : $H=2C-3F$.
c. Quels sont les produits de deux matrices issues de la liste que l'on peut faire ? Quelle est la taille des matrices obtenues ?
d. Vérifier que $(CA)B = C(AB)$
e. Calculer EF et FE. A-t-on $(E+F)^2 = E^2 + 2EF + F^2$?
f. Calculer CX et déterminer X tel que $CX = D$.

2. Résolvez l'équation matricielle suivante d'inconnue $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$XC=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ où } C \text{ est la matrice } C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer toutes les matrices 2×2 à coefficients réels qui commutent avec la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Autre manière de décrire les solutions :
Montrer que les matrices obtenues sont les matrices de la forme $\alpha I_2 + \beta A$, où α et β sont des nombres réels. (I_2 désigne la matrice unité d'ordre 2).

4. Dans chacun des cas ci-dessous, trouvez les matrices $A = [a_{ij}]$ de dimension 6x6 qui satisfont à la condition indiquée.

(a) $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ **(b)** $a_{ij} = 0$ si $i > j$
(c) $a_{ij} = 0$ si $i < j$ **(d)** $a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$

5. Soit la matrice $D=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer D^n pour tout n.

6. Soit A la matrice de $M_2(IR)$ définie par $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en utilisant le binôme de Newton.

On pourra écrire $A=-2I_2+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. On dit d'une matrice B qu'elle est une racine carrée d'une matrice A si $BB = A$.

(a) Trouver deux matrices carrées de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Combien de racines carrés différentes pouvez-vous donner à la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$?

(c) Pensez-vous que toute matrice 2x2 possède au moins une racine carrée ?

8. a. Résoudre le système (S) suivant : $\begin{cases} -x+2y-4z=a \\ y+3z=b \\ -x+3y-1z=c \end{cases}$ en fonction des réels a, b et c.

Traduire le système (S) sous forme matricielle.

b. La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui donner son inverse.

9. Ecrire les matrice K, L et M matrices carrées d'ordre 4 tel que, si A est une matrice carrée d'ordre 4 :

- KA est la matrice qui a la même première ligne et la même dernière ligne que A mais dont la deuxième ligne est obtenue comme somme de la première et la deuxième ligne de A et dont la troisième ligne est 4 fois la troisième ligne de A.
- LA est la matrice qui a la même première ligne et la même troisième ligne que A mais dont la deuxième ligne et la quatrième ont été échangées.
- AM est la matrice qui a la même première colonne que A mais dont la deuxième colonne est obtenue comme somme de la première colonne et la deuxième colonne de A et dont la troisième colonne et la quatrième colonne ont été échangées.

10. Les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ?

Quand elles le sont, donner leur inverse.

11. Montrer qu'une matrice dont une ligne n'est constituée que de zéros n'est pas inversible.