L1, algèbre linéaire
2011/2012
Mathématiques

Université Paris 13

Espaces vectoriels

Exercice 1. On note $u = (u_1, u_2)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ et on définit deux opérations :

$$\begin{cases} + : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) \quad \mapsto u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bullet : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (a,u) \quad \mapsto a \bullet (u_1,u_2) = (0, au_2). \end{cases}$$

Est-ce que $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 2. Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $U \in E$.

(1) Montrer : $aU = 0 \iff a = 0$ ou $U = 0$. S'agit-il du même 0 ?
(2) Montrer : $(-a)U = -(aU)$.
(3) Montrer : $aU = bU \iff a = b$ ou $U = 0$.

Exercice 3.

(1) Montrer que $\mathbb{R}_+^*$ muni des opérations suivantes :

$$\begin{cases} \cdot : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ & (x,y) \quad \mapsto x \cdot y = xy \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} * : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ & (a,x) \quad \mapsto a * x = x^a \end{cases}$$

est un espace vectoriel.

(2) Peut-on remplacer $\mathbb{R}_+^*$ par S^1, l'ensemble des complexes de module 1 ?

Exercice 4. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$,

$A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 3\}$, $A_{(a,b,c)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ (selon les valeurs de a, b, et $c \in \mathbb{R}$).

Exercice 5. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices réelles 2×2, et on munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les parties suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$, $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad \geq 0 \right\}$, $A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \textit{ inversible} \right\}$,

$A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \textit{ non inversible} \right\}$, $A_5 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MA = 0\}$ (avec $A \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$),

$A_6 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ (avec $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$), $A_7 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ ($A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Exercice 6.

(1) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, à quelles conditions sur a, b, c et d l'équation $ax + by + cz = d$ définit-elle un sous-espace vectoriel ? un sous-espace vectoriel différent de $\mathbb{R}^3$ (on dit alors un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$) ?
(2) Notons P un tel un plan vectoriel. Soit Q d'équation $a'x + b'y + c'z = d'$. A quelle condition a-t-on $Q = P$? A quelle condition a-t-on $P \cap Q = \varnothing$?
(3) Trouver tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ contenant $(1,2,3)$. Déterminer leur intersection et la nature de celle-ci.

Exercice 7 (Révision du cours)**.** Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $S = (u_1, \ldots, u_n)$, une famille de n vecteurs de E.

(1) Montrer que l'ensemble $L(S)$ des combinaisons linéaires des vecteurs de S, est un sous espace vectoriel de E.
(2) Soit G un s.e.v. de E. Montrer qu'on a : $L(S) \subset G \iff S \subset G$.
(3) Montrer que $L(S)$ est le *plus petit* sous-espace vectoriel de E contenant S. On notera comme dans le cours $\mathrm{vect}(S)$ au lieu de $L(S)$.

Exercice 8. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles de vecteurs suivants :

$$S = \{u = (1,2,1),\ v = (1,-3,2)\} \textit{ et } S' = \{u' = (0,5,-1),\ v' = (3,1,4)\}$$

(1) u' et v' appartiennent-ils à $\mathrm{vect}(S)$?
(2) u et v appartiennent-ils à $\mathrm{vect}(S')$?
(3) Comparer pour l'inclusion $\mathrm{vect}(S)$ et $\mathrm{vect}(S')$.
(4) Donner une équation cartésienne de $\mathrm{vect}(S)$.
(5) Trouver $w \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille (u, v, w) engendre $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. On munit $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices réelles 2×3, de l'addition usuelle des matrices, et de la multiplication par un nombre complexe définie de la manière suivante :

$$(x+iy) \bullet \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} .$$

(1) Montrer que cela fait de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
(2) Exprimer $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. On note S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(1) Munir S d'une structure d'espace vectoriel.
(2) Soit Q l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Q est un sous-espace vectoriel de S.
(3) Etablir un lien entre Q et P, l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
(4) Montrer que l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} = 3u_n - nu_{n+1}$ pour tout n est un sous-espace vectoriel de S.
(5) L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} = 3u_n + u_{n+1} + 2$ pour tout n est-il un sous-espace vectoriel de S ?

Exercice 11. Soit A, un ensemble et E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{F}(A,E)$ l'ensemble des applications de A dans E.
(1) Montrer que $\mathcal{F}(A,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(2) Identifier ces ensembles à d'autres bien connus lorsque : i) $A = \{1,\dots,n\}$, $E = \mathbb{K}$, ii) $A = \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$, $E = \mathbb{K}$, iii) $A = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{K}$.
(3) Dire si les parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels : $P_1 = \{f \mid f(0) = 1\}$, $P_2 = \{f \mid f(1) = 0\}$, $P_3 = \{f \mid f(0) = f(1)\}$, $P_4 = \{f \mid (f(0))^2 = f(1)\}$, $P_5 = \{f \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\}$.

Exercice 12. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
(1) Montrer que $\mathcal{P}_2$, l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2, est un s.e.v. de $\mathcal{P}$.
(2) Montrer que $A = \{P \in \mathcal{P} \mid P(2) = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathcal{P}$.
(3) Montrer que $x - 2$ et $x^2 - 2x$ engendrent $\mathcal{P}_2 \cap A$.
(4) Soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, l'ensemble des polynômes pairs et $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$, l'ensemble des polynômes impairs. Montrer qu'on a : $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{R}$.

Exercice 13. Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit F, G et H, trois sous-espaces vectoriels de E.
(1) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
(2) Montrer : $F \subset H$ et $G \subset H \iff F + G \subset H$.
(3) Montrer : $G + (F \cap H) \subset (G + F) \cap (G + H)$.
(4) Montrer qu'on a : $G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$.

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère P_1, le plan $0xy$, P_2, le plan $0xz$, et D, l'axe $0z$.
(1) Vérifier que P_1, P_2 et D sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer $P_1 + P_2$. A-t-on $P_1 \oplus P_2 = \mathbb{R}^3$?
(3) Déterminer $P_1 + D$. A-t-on $P_1 \oplus D = \mathbb{R}^3$?
(4) Déterminer $P_2 + D$. A-t-on $P_2 \oplus D = \mathbb{R}^3$?

Exercice 15. Soit $n \geq 2$, un entier, et $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$E_\lambda = \{v \in E \mid Av = \lambda v\}.$$

(1) Montrer que E_λ est un s.e.v. de E.
(2) Montrer que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.
(3) On suppose maintenant : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et on pose $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que E_0 est engendré par v_2 et v_3, et que E_3 est engendré par v_1.
(4) Montrer qu'on a : $E = E_0 \oplus E_3$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $U = (1,0,1,-1)$, $V = (1,1,0,1)$, $W = (-1,1,-1,1)$, et $X = (1,2,0,1)$. Soit $F = \mathrm{vect}(U,V)$ et $G = \mathrm{vect}(W,X)$.
(1) Déterminer $F \cap G$. Soit $H = F + G$. Montrer que cette somme n'est pas directe.
(2) Montrer qu'on a $H \neq \mathbb{R}^4$.
(3) Trouver un supplémentaire de H.