Dépendance et indépendance linéaires, dimension

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les familles $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ suivantes sont-elles liées ? Sont-elles génératrices ?

(1) $\vec{u}_1 = (-1, 1, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 4)$, $\vec{u}_3 = (1, -2, -2)$.
(2) $\vec{u}_1 = (1, -1, -3)$, $\vec{u}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$.
(3) $\vec{u}_1 = (2, 3, 4)$, $\vec{u}_2 = (4, 3, 2)$ et $\vec{u}_3 = (5, 5, 5)$
(4) $\vec{u}_1 = (1, 1, m)$, $\vec{u}_2 = (1, m, 1)$, et $\vec{u}_3 = (m, 1, 1)$, où m désigne un paramètre réel.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les famille suivantes sont-elles libres? Sont-elles génératrices?

(1) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(2) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
(3) $A_1 = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les familles suivantes sont-elles libres?

(1) (f, g, h) avec $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \sin(x + \pi/4)$.
(2) (f_1, f_2, f_3, f_4) avec $f_k(x) = e^{kx}$.
(3) (f_1, f_2, f_3, f_4) avec $f_k(x) = x^k$.

Exercice 4. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$.

(1) Comparer les sous-espaces $\mathrm{vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathrm{vect}(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$.
(2) Y-a-t-il un lien entre la nature (libre, liée) de la famille $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ et celle de la famille $(\vec{u}, \vec{v})$?

Exercice 5. Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ une famille libre d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$. les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? $\mathcal{F}_1 = (\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u})$, $\mathcal{F}_2 = (\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} - \vec{u})$. $\mathcal{F}_3 = (\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$, $\mathcal{F}_{a,b} = (a\vec{u}, 2\vec{u} + b\vec{v})$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels réels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En donner une base et leur dimension:

(1) L'ensemble des matrices réelles $n \times n$ triangulaires supérieures.
(2) L'ensemble des matrices réelles diagonales.
(3) $\left\{ \begin{bmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & c \end{bmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ $(n = 3)$.
(4) L'ensemble des matrices 3×3 dont la première ligne et la deuxième colonne est nulle $(n = 3)$.

Exercice 7. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

(1) Montrer que $\{1, i\}$ est une base de $\mathbb{C}$.
(2) On rappelle que $j = \cos(\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{2\pi}{3})$. Vérifier que $j^2 = \bar{j}$, $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
(3) la famille $\{1, i, j\}$ est-elle libre ou liée ? est-elle génératrice ?
(4) Montrer que $\{1, j\}$ constitue une base de $\mathbb{C}$.
(5) Exprimer tout nombre complexe $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sous la forme $x + jy$ avec x et y réels.

(6) Soit $z = x + jy$ et $z' = x' + jy'$. Exprimer dans la base $\{1, j\}$ les complexes $z + z'$, $z.z'$, iz, jz, $j^2 z$, $|z|^2$, z^{-1}.

On considère maintenant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

(1) Dans la famille $\{1, i, j\}$, quelles sont les sous-familles (y compris elle-même) génératrices, libres, liées ?
(2) Quelles sont les sous-familles qui constituent des bases ?
(3) Dans chacune de ces bases, comment exprimer un nombre complexe ?

Exercice 8. Exprimer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans les bases suivantes :

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, -1), (-3, 0, 1), (1, 1, 0)),\ \mathcal{B}_2 = ((-1, 0, 1), (1, 1, -1), (0, -1, 1))\ .$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

(1) Montrer que les polynômes $P_0(X) = 1$ et $P_k(X) = \frac{(X+1)(X+2)...(X+k)}{k!}$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Montrer que les polynômes $P_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{v}_1 = (1, 2, a)$, $\vec{v}_2 = (a, a^2, 4)$, $\vec{v}_3 = (a, a^2, a + 2)$, où a est un paramètre réel. Soit $E = \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Déterminer la dimension de E, suivant les valeurs de a.

Exercice 11. Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, -6, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -5, 1)$, et $\vec{v}_3 = (3, -4, 1)$.

(1) Montrer que les familles $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ et $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ sont des familles libres mais que la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ n'est pas libre. Est-elle génératrice ?
(2) De quelles propositions du cours cet exercice peut-il être rapproché ?

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $\vec{u} = (1, -1, 2, 6)$, $\vec{v} = (2, -1, 3, 4)$, et $\vec{w} = (-1, 2, -1, 2)$.

(1) Donner une équation cartésienne de $\text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
(2) A quelle condition le vecteur (a, b, c, d) engendre-t-il un supplémentaire de $\text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

Exercice 13. Soit P le plan défini par $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$, et D la droite de vecteur directeur $\vec{e} = (0, 1, 2)$.

(1) Déterminer pour tout vecteur $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ des vecteurs $\vec{v} \in P$ et $\vec{w} \in D$ tels que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.
(2) En déduire que P et D sont supplémentaires.
(3) Calculer $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans le cas où $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

Exercice 14. Dans chacun des cas suivants, donner la dimension de l'espace vectoriel réel E, des sous-espaces vectoriels F et G, et dire avec le moins de calculs possibles, si F et G sont supplémentaires dans E.

(1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 12x + 5y - 4z = 0\big\}$, $G = \text{vect}(1, 1, 1)$.
(2) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, F est le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques (i.e. telles que ${}^tA = A$) et G celui des matrices antisymétriques (i.e. telles que ${}^tA = -A$).
(3) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, F est l'espace vectoriel des matrices 2×2 triangulaires supérieures et $G = \text{vect}\left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$.
(4) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, F est le sous-espace vectoriel des matrices 2×2 triangulaires supérieures, G est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques.
(5) Remplacer “symétriques” par “antisymétriques” dans la question précédente.
(6) $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F = \mathbb{R}_3[X]$, $G = \text{vect}(X^4 + 1, X^4 + 2)$.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^4$, soit F et G définis respectivement par les systèmes linéaires :

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y - z + t &= 0 \\ x - y + z + t &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{aligned} x + y + z + -t &= 0 \\ x \qquad - 2z + 2t &= 0 \end{aligned}\right.$$

(1) Trouver deux familles : $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ qui engendre F et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ qui engendre G.
(2) Trouver une équation cartésienne de $F + G$.

Exercice 16. Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

(1) Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$, une famille d'éléments de E. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si : $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ et pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, $\vec{u}_k \notin \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k-1})$. Que signifie $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ liée ?

(2) Soit $E_1, \ldots, E_n$, n sous-espaces vectoriels de E, et soit $F = E_1 + \cdots + E_n$. Montrer qu'on a $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ si et seulement si : pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, $E_k \cap (E_1 + \cdots + E_{k-1}) = \{0\}$.

(3) Soit $E_1 = \mathrm{vect}(\vec{u}_1), \ldots, E_n = \mathrm{vect}(\vec{u}_n)$, et soit $F = E_1 + \cdots + E_n$. A-t-on $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ si et seulement si $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre ?

Exercice 17. Soit $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ n scalaires non nuls de $\mathbb{K}$.

(1) Comparer les sous-espaces $\mathrm{vect}(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ et $\mathrm{vect}(\lambda_1\vec{u}_1, \cdots, \lambda_n\vec{u}_n)$.

(2) Y a-t-il un lien entre la nature (libre, liée) de ces deux familles, les rangs de ces deux familles ?

Exercice 18.

(1) Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $\vec{u}_1 = (2, -3, 4, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, -1, 2)$, $\vec{u}_3 = (3, -1, 2, -3)$, $\vec{u}_4 = (3, -1, 1, -7)$.

(2) Extraire une famille libre de cette famille.

(3) Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivants de $\mathbb{R}^5$: $\vec{u}_1 = (1, 1, 1, 2, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 2, 1, -2)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, -1, 1, 1)$, $\vec{u}_4 = (1, 2, 0, -3, 1)$.

(4) Trouver $\vec{u}_5$ tel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 19. Soit $\vec{u} = (0, -3, 2, 2)$, $\vec{v} = (-1, 1, 2, -1)$, et $\vec{w} = (-4, 3, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(1) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une famille libre.

(2) Soit $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$. On considère le système $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{b}$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$.
   (a) En utilisant la question précédente, montrer que si le système admet une solution, celle-ci est unique.
   (b) A quelle condition sur le vecteur b, le système $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w} = b$ admet-il au moins une solution?
   (c) En déduire une équation cartésienne de $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

(3) Considérons le vecteur $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$. Ce vecteur est-il dans F ? Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1)$ est un supplémentaire de F. En déduire que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{e}_1)$ constitue une base de $\mathbb{R}^4$.

(4) Décomposer un vecteur quelconque $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ sur la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{e}_1)$.

Exercice 20.

(1) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère un plan P d'équation $ax + by + cz = 0$, supplémentaire de l'axe $0z$. Que doit vérifier (a, b, c) ?

(2) Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, une base de P. Montrer qu'il existe une unique base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ du plan $0xy$ telle que : $(\vec{u}_1 - \vec{v}_1, \vec{u}_2 - \vec{v}_2) \in 0z \times 0z$.

(3) Soit $((1, 0, \alpha), (0, 1, \beta))$, une base de P. Soit $\vec{w} = (x, y, z) \in P$. Trouver les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette base.

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z, t) \mid x+y+z+t = x-2y+z+t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \mid -x - y - z + t = -x + 2y + z + 2t = 0\}$.

(1) Montrer que la somme $F + G$ est directe.

(2) Trouver une base de F, une base de G, et montrer que F et G sont supplémentaires.

(3) Soit $\vec{u} = (0, 1, 2, 1)$. Trouver $\vec{v} \in F$ et $\vec{w} \in G$ tels que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

Exercice 22. Considérons le système d'inconnues réelles :

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}\right.$$

(1) Déduire de la résolution du système une base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ de l'espace F des solutions.

(2) Compléter cette base en une base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4)$ de $\mathbb{R}^4$.