L1, algèbre linéaire
2011/2012
Mathématiques

Université
Paris 13

TD 5: Applications linéaires

Définition, noyau, image

Exercice 1. Les applications suivantes de E dans F sont elles linéaires? Si oui, déterminer une base du noyau et une base de l'image.
1. $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (2x + 3y, x)$.
2. $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (y, x + y + 1)$.
3. $E = \mathbb{R}^3,\ F = \mathbb{R}, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = x + 2y - z$.
4. $E = F = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + y, xy)$.
5. $E = F = \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

Exercice 2.
a) Donner une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes:

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_1(x, y, z) = 3x + 2y - z$;
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x, y) = (2x + y, 2x - y, x + y)$;
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_3(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - z, -x + 2y + 2z)$.

b) Soit E la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(-1, 1, -1)$. Donner, quand cela a un sens, une base de l'image et de l'image réciproque de E par les applications linéaires f_1, f_2 et f_3.

Exercice 3.
a) Montrer que toute application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ non nulle est de la forme $f(x, y, z) = ax + by + cz$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. (On pourra partir de l'égalité $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$.)
b) Quelle est la forme d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$?
c) De même quelle est la forme d'une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z)$.
a) Donner une base de l'image et une base du noyau de f. Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.
b) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de E? Donner une base de $f(E)$ et une base de $f^{-1}(E)$.

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée (e_1, e_2, e_3). On définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_2) = 2e_1 + e_3$ et $f(e_3) = -3e_3$. Pourquoi f est-il bien défini? Quelle est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3)?

Exercice 6. Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{bmatrix}, \text{ où } a, b \neq 0.$$

Déterminer le noyau et l'image de f.

Rang, injectivité et surjectivité

Exercice 7. Donner dans chaque cas la dimension du noyau de f, puis le rang de f. L'application f est-elle injective? surjective? bijective?

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y, z, x)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$.

c) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$, $f(x, y, z) = (x + y + z)(1, i, -1, i)$.

d) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$, $f(x, y) = (x - y, x + iy, (2 + i)x + y, 3ix + y)$.

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + my - z, 2x + 2y, x - 2z)$, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$ est: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer $Ker(f)$ et une base de $Ker(f)$.

b) Déterminer $Im(f)$ et une base de $Im(f)$.

c) Quel est le rang de f ?

Exercice 9. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même, dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ m & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

a) Discuter l'injectivité de f suivant m.

b) Donner dans tous les cas le rang de f, une base de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire.

a) Montrer $\dim E = \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f)$.

b) Montrer $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

c) Montrer $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

d) En utilisant **b)**, dire si $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$ dans les deux cas suivants:

i) $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - z, x - 2y + z)$.

ii) $f(x, y, z) = (2(x + y + z), 0, x + y + z)$.

Exercice 11. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4.

Montrer que l'application f de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui même, définie par $f(P) = P - P'$ est linéaire. L'application f est-elle injective? surjective?

Projecteurs

Exercice 12. Dans chaque cas, montrer que les sous-espaces F_1 et F_2 de l'espace vectoriel E sont supplémentaires, puis calculer la projection p sur F_1 parallèlement à F_2 et la projection q sur F_2 parallèlement à F_1.

a) $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathrm{vect}\{(1,0)\}$, $F_2 = \mathrm{vect}\{(0,1)\}$.

b) $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathrm{vect}\{(1,0)\}$, $F_2 = \mathrm{vect}\{(1,1)\}$.

c) $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y=z\}$, $F_2 = \mathrm{vect}\{(1,1,1)\}$.

d) $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \mathrm{vect}\{(1,1,0)\}$, $F_2 = \mathrm{vect}\{(0,1,1),(-1,0,3)\}$

Composition des applications linéaires, matrices et changements de bases

Exercice 13. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ définies par : $f(x,y,z) = (2x-2y-3z, x-y-2z, -x+y+2z)$ et $g(x,y,z) = (x-2y, x-y+z, y-z)$.

a) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ en utilisant le calcul matriciel.

b) Déterminer les rangs de f et g.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ une base de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f l'application linéaire de E dans lui-même définie par: $f(\vec{a}_1) = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $f(\vec{a}_2) = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ et $f(\vec{a}_3) = \vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_3$.

a) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer le noyau de f et en donner une base, suivant les valeurs du paramètre λ. Déterminer dans tous les cas le rang de f.

c) Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme[1] de E? Dans ce cas, calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 15. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{v} = (1,2)$.

a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Calculer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$. Déterminer les matrices

$$A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \text{ et } A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f).$$

c) Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Retrouver A_1 et A_2 en utilisant la formule de changement de bases.

Exercice 16.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}' = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}' \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les familles de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$.

a) Vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1] C'est à dire un isomorphisme de E dans lui-même

Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 17. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, définie par: $f(x,y,z) = (17x - 28y + 4z, 12x - 20y + 3z, 16x - 28y + 5z)$.
a) Ecrire la matrice de f dans la base canonique.
b) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ du noyau de f.
c) Soit $F = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } f(\vec{v}) = \vec{v} \right\}$ le sous-espace des vecteurs invariants par f. Justifier que F est un espace vectoriel et déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de F.
d) Montrer que les deux espaces précédents sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
e) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Exercice 18. Soit $\phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto X.P'$.

a) Vérifier que ϕ est linéaire et que $\{1, X, X^2, X^3\}$ constitue une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Écrire la matrice de ϕ dans cette base.

Exercices supplémentaires

Exercice 19. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $f : \mathcal{M}_2(R) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = AM - MA$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Montrer que f est une application linéaire.
b) Ecrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) On suppose que $a = d$, $c = -b$ et $b \neq 0$.
i) Déterminer le noyau et l'image de f.
ii) Montrer que $Ker(f) \bigcap Im(f) = \{0\}$. En déduire que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = Ker(f) \bigoplus Im(f)$.
iii) Montrer que $f \circ f \circ f = -f$.

Exercice 20. Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tels que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$