CHAPITRE 1

L'équation linéaire: la théorie classique

1. Présentation de l'équation

L'équation des ondes linéaire est l'équation:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

où $N \geq 1$ est la dimension d'espace (dans ce cours, nous supposerons très souvent $N = 3$), et

$$\Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

(On utilisera indifféremment les notations ∂_y ou $\frac{\partial}{\partial y}$ pour la dérivée par rapport à la variable $y \in \{t, x_1, \ldots, x_N\}$).

C'est une équation d'évolution: on fixe une donnée initiale à un certain temps $t = t_0$, et on s'intéresse à l'évolution de l'équation au cours du temps t. Puisque l'équation est d'ordre 2, on fixe en fait une donnée initiale pour $(u, \partial_t u)$, que l'on notera $\vec{u}$:

$$\vec{u}_{\restriction t=t_0} = (u_0, u_1) \tag{1.2}$$

où (u_0, u_1) est à prendre dans un certain espace fonctionnel.

Nous considèrerons dans ce cours des données initiales *à valeurs réelles*. Le passage aux valeurs complexes ou vectorielles est immédiat pour la plupart des propriétés de l'équation (1.1) (en travaillant coordonnée par coodonnée), mais peut induire des changements drastiques dans le cas non-linéaire, pour peu que la non-linéarité mélange les coordonnées.

L'équation (1.1) est invariante par plusieurs transformations de l'espace-temps évidentes. Si u est une solution, c'est également le cas de

$$\mu u(t - t_0, \lambda(Rx - x_0)),$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $R \in \mathcal{O}_N(R)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$.[1]

On voit par exemple qu'on peut se limiter, sans perte de généralité, au cas d'un temps initial $t_0 = 0$, i.e.

$$\vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \tag{1.3}$$

Par ailleurs, l'équation est invariante par inversion du temps: si u est solution, c'est également le cas de $t \mapsto u(-t, x)$. En particulier, c'est une équation réversible.

Nous allons également nous intéresser à l'équation avec une force:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f, \tag{1.4}$$

[1] L'équation (1.1) est en fait invariante par un groupe plus large de transformations linéaires, le groupe de Lorentz (cf §7 plus loin)

(toujours avec une condition initiale de type (1.3)), dont la compréhension sera cruciale pour l'étude de l'équation des ondes non-linéaire.

Le problème de Cauchy (1.1), (1.3) peut être abordé selon au moins 3 approches différentes:

- L'approche classique qui consiste à trouver une formule explicite pour exprimer la solution. Elle fonctionne lorsque les données initiales sont assez régulières ($C^3 \times C^2$ en dimension 3 d'espace) et donne des solutions classiques (c'est à dire C^2 en (t,x) et vérifiant (1.1) au sens de la dérivée classique).
- L'utilisation de la transformation de Fourier en espace, qui est très simple (une fois qu'on connaît la transformation de Fourier) et particulièrement efficace dans les espaces de Sobolev basés sur L^2 (qui sont des espaces naturels pour l'étude de l'équation en vertu de la conservation de l'énergie). Cette méthode permet d'obtenir des solutions faibles à des degrés de régularité inférieurs à la précédente, et d'utiliser des outils basés sur la transformation de Fourier, ce qui peut être utile, par exemple, pour démontrer certaines propriétés dispersives de l'équation.
- L'approche "analyse fonctionnelle", par la théorie des semi-groupes, qui donne le même type de solutions que la méthode précédente.

Dans ce chapitre, nous allons détailler la méthode classique, en écrivant d'abord la formule explicite pour les solutions en dimension 1 d'espace, puis en dimensions supérieures. Nous étudierons dans le chapitre suivant l'équation dans l'espace d'énergie par la transformation de Fourier. Ce chapitre est en partie basé sur le Chapitre 5 du très beau livre de Folland sur les équations aux dérivées partielles [**1**].

2. Formule explicite en dimension 1.

En dimension 1, l'équation (1.1) s'écrit:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0, \tag{2.1}$$

i.e. $(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u = 0$. On fait donc le changement de variables $\eta = x + t$, $\xi = x - t$. On a donc, en posant $v(\eta, \xi) = u\left(\frac{\eta-\xi}{2}, \frac{\eta+\xi}{2}\right)$, soit $u(t,x) = v(t+x, t-x)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta},$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}.$$

On obtient donc

$$(1.1) \iff \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Soit u une solution C^2 de (2.1), (1.3). On a donc $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$.

L'égalité $\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\partial\xi} = 0$ montre que $\frac{\partial v}{\partial\xi}$ est une fonction (de classe C^1) $w(\xi)$ indépendante de η. En intégrant à η fixé par rapport à ξ, on en déduit

$$v(\eta, \xi) = \underbrace{\int_0^\xi w(\sigma)d\sigma}_{\varphi(\xi)} + \psi(\eta),$$

pour une certaine fonction ψ, n'écessairement C^2 puisque v est de classe C^2 et w de classe C^1. On a donc nécessairement

$$v(\eta, \xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad \varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}^2),$$

ou encore

$$u(t, x) = \varphi(x - t) + \psi(x + t). \tag{2.2}$$

En utilisant la condition initiale (1.3), un calcul direct donne

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}\int_0^\eta u_1(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}u_0(\eta) + c$$
$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{2}\int_0^\xi u_1(y)dy + \frac{1}{2}u_0(\xi) - c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ (le choix de cette constante est indifférent). On en déduit

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + t) + u_0(x - t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy. \tag{2.3}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que la formule (2.3) donne une solution C^2 de (2.1), (1.3). On a donc montré:

Proposition 2.1. *Soit* $(u_0, u_1) \in C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$. *Alors il existe une unique solution* $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *de* (1.1) *vérifiant la condition initiale* (1.3). *Cette solution vérifie la formule* (2.3).

On voit sur la formule (2.2) qu'une solution de l'équation des ondes en dimension 1 est la somme de deux ondes, l'une, $\varphi(x - t)$, se déplaçant à vitesse 1 vers la droite (appelée *onde progressive*) et l'autre $\psi(x+t)$, se déplaçant à la même vitesse vers la gauche.[2]

Il est également possible d'obtenir une formule pour l'équation avec second membre (1.4). Nous laissons ceci en exercice au lecteur (Exercice 1.1).

Nous donnerons plus loin une formule générale donnant la solution de l'équation avec second membre en fonction de l'équation sans second membre.

On voit sur la formule (2.3) que $u(t, x)$ ne dépend que des valeurs de (u_0, u_1) sur $\Big[x - |t|, x + |t|\Big]$. C'est un premier exemple de "vitesse finie de propagation" qui est valable en toutes dimension d'espace.

[2]Remarquons que les équations (1.1), (2.1) ont été normalisée pour que la vitesse de propagation soit exactement égale à 1.

3. Intégrale sur la sphère et formule de la divergence

Nous noterons $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N,\ |x| = 1\}$, où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$:

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^{N} x_j^2.$$

Plus généralement, S_R^{N-1} désignera la sphère de rayon R: $\{x \in \mathbb{R}^N,\ |x| = R\}$.

Nous noterons $d\sigma$ l'élément de volume sur une de ces sphères. Ainsi, l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(S_R^{N-1})$ (i.e. une fonction intégrable sur S_R^{N-1}) s'écrira

$$\int_{S_R^{N-1}} f(y) d\sigma(y).$$

En dimension 3, cette intégrale peut par exemple se calculer en utilisant des coordonnées sphériques:

$$\int_{S_R^2} f(y) d\sigma(y) = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R \sin\varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

Nous noterons $B_R^N(x_0)$ la boule de centre x_0 et de rayon R:

$$B_R^N(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N,\ |x - x_0| < R \right\}$$

et simplement $B_R^N = B_R^N(0)$.

Nous utiliserons les formules suivantes

Changement d'échelle:

$$\int_{S_R^{N-1}} f(y) d\sigma(y) = R^{N-1} \int_{S^{N-1}} f(Ry) d\sigma(y) n \quad f \in \mathcal{L}^1(S_R^{N-1}).$$

Intégrale en coordonnées radiales: si $f \in \mathcal{L}^1(\{|x| \leq R\})$,

$$\int_{B_R^N} f(x) dx = \int_0^R \int_{S_r^{N-1}} f(y) d\sigma(y) dr = \int_0^R \int_{S^{N-1}} f(r\omega) d\sigma(\omega) r^{N-1} dr$$

Formule de la divergence: si $F \in C^1(\overline{B_R}, \mathbb{R}^N)$,

$$\int_{|x| \leq R} \nabla \cdot F(x) dx = \int_{S_R^{N-1}} \frac{y}{|y|} \cdot F(y) d\sigma(y),$$

où $\nabla \cdot F = \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} F_j$ est la divergence du champs de vecteur F.

4. Densité d'énergie. Unicité et vitesse finie de propagation

Avant de donner une formule explicite pour l'équation des ondes en dimension 3, on démontre un résultat d'unicité valable en toute dimension:

Theorem 1. *Soit* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+N}$, $t_1 > t_0$, $R > 0$. *On note* $\Gamma = \Big\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \ :\ t_0 \leq t \leq t_1,\ |x - x_0| \leq R - |t - t_0| \Big\}$ *Soit* $u \in C^2(\Gamma)$ *une solution de* (1.1) *sur* Γ. *On suppose* $(u, \partial_t u)(t_0, x) = 0$ *pour tout* $x \in B_R(x_0)$. *Alors* u *est identiquement nulle sur* Γ.

La démonstration du théorème est basée sur une loi de monotonie qui a son intérêt propre.

On note, pour $(t,x) \in \Gamma$,

$$e_u(t,x) = \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{2}(\partial_t u(t,x))^2,$$

où $|\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^N (\partial_{x_j} u)^2$, et on considère, pour $t_0 \leq t \leq t_1$, l'énergie locale

$$E_{\text{loc}}(t) = \int_{B_{R-(t-t_0)}(x_0)} e_u(t,x)dx = \int_{|x-x_0|<R-(t-t_0)} e_u(t,x)dx.$$

Lemma 4.1. *La fonction E_{loc} est décroissante sur $[t_0,t_1]$.*

Le lemme implique immédiatement le théorème 1. En effet, si $\vec{u}(t_0)$ s'annule sur $B(x_0,R)$, alors $E_{\text{loc}}(t_0) = 0$, et donc $E_{\text{loc}}(t) = 0$ pour tout $t \in [t_0,t_1]$, ce qui montre que u est nulle sur Γ.

Preuve du lemme 4.1. On remarque que

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j} u \partial_t \partial_{x_j} u + \partial_{x_j}^2 u \partial_t u\right) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\partial_{x_j} u \partial_t u\right) = \nabla \cdot \left(\partial_t u \nabla u\right). \tag{4.1}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer pour simplifier les notations que $x_0 = 0$ et $t_0 = 0$. Par la formule d'intégration en coordonnées radiales,

$$E_{\text{loc}}(t) = \int_0^{R-t} s^{N-1} \int_{S^{N-1}} e_u(t,s\omega)d\sigma(\omega)ds.$$

Par la formule de dérivation sous le signe somme, on obtient que E_{loc} est dérivable et

$$E'_{\text{loc}}(t) = -(R-t)^{N-1} \int_{S^{N-1}} e_u(t,(R-t)\omega)d\sigma(\omega) + \int_{B^N_{R-t}} \frac{\partial e_u}{\partial t}(t,x)dx.$$

Par la formule (4.1), puis la formule de la divergence

$$\int_{B^N_{R-t}} \frac{\partial e_u}{\partial t}(t,x)dx = \int_{B^N_{R-t}} \nabla \cdot \left(\partial_t u \nabla u\right)(t,x)dx = \int_{S^{N-1}_{R-t}} \frac{y}{|y|} \nabla u \partial_t u(t,y)d\sigma(y).$$

On a donc

$$\begin{aligned} E'_{\text{loc}}(t) &= -\int_{S^{N-1}_{R-t}} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{y}{|y|}\nabla u \partial_t u(t,y)\right) d\sigma(y) \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_{S^{N-1}_{R-t}} \left(\frac{y}{|y|}\nabla u + \partial_t u(t,y)\right)^2 d\sigma(y). \end{aligned}$$

□

5. Formules explicites.

On considère maintenant les dimensions supérieures d'espace. En dimension $N = 3$, nous allons montrer que pour toute donnée initiale $(u_0,u_1) \in C^2 \times C^3$, il existe une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^{1+3})$ de (1.1), (1.3), et donner une formule explicite pour cette solution. Nous allons également donner une formule en dimension $N = 2$. On renvoie la lectrice à [**1**, Chapter 5B] pour des expressions des solutions lorsque $N \geq 4$.

5.1. Le cas radial en dimension 3. Lorsque les conditions initiales ne dépendent que de la variable $r = |x|$, la formule explicite est très simple.

On commence par montrer que si f ne dépend que de la variable r, la fonction f est C^2 en temps que fonction sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est C^2 en temps que fonction de la variable r sur $[0, \infty[$, et vérifie $\frac{df}{dr}(0) = 0$. De plus,

$$\Delta f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}$$

(cf Exercice 1.2). On remarque que l'on peut réécrire cette formule

$$r\Delta f = \frac{d^2}{dr^2}(rf).$$

Soit maintenant u une solution C^2 de (1.1), (1.3) dont les conditions initiales (u_0, u_1) sont radiales. On suppose que pour tout t, $u(t)$ est radiale. Nous montrerons a posteriori que cette hypothèse est vérifiée. La formule précédente donne

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(ru) = 0.$$

La fonction $(t, r) \mapsto ru(t, r)$ est donc solution de l'équation des ondes en dimension 1, sur $\mathbb{R}_t \times (0, \infty)$. Pour obtenir une fonction sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, on prolonge $ru(t, r)$ en une fonction impaire:

$$v(t, y) = yu(t, |y|).$$

On peut vérifier (en utilisant l'exercice 1.2) que v est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = 0.$$

La formule (2.3) donne alors:

$$v(t, y) = \frac{1}{2}(v_0(y + t) + v_0(y - t)) + \frac{1}{2}\int_{y-t}^{y+t} v_1(\sigma)d\sigma,$$

où $(v_0, v_1) = \vec{v}_{\restriction t=0}$, soit

$$u(t, r) = \frac{1}{2r}\Big((r + t)u_0(|r + t|) + (r - t)u_0(|r - t|)\Big) + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} \sigma u_1(|\sigma|)d\sigma. \tag{5.1}$$

Remarquons que lorsque $t > 0$ (pour fixer les idées),

$$\int_{r-t}^{r+t} \sigma u_1(|\sigma|)d\sigma = \int_{|r-t|}^{r+t} \sigma u_1(|\sigma|)d\sigma.$$

La vitesse finie de propagation est bien vérifiée: la solution $u(t, r)$ ne dépend que de la condition initiale (u_0, u_1) entre sur la boule de centre r et de rayon $|t|$.

La formule (5.1) définit une fonction $u(t, r)$ de classe C^2 en dehors de l'origine $x = 0$, et ce dès que les conditions initiales (u_0, u_1) ont la régularité attendue $C^2 \times C^1$. En revanche, il y a un phénomène subtile de perte de régularité à l'origine de la solution u par rapport à la donnée initiale: il existe des données $(u_0, u_1) \in C^2 \times C^1$ telles que u, défini par la formule (5.1), ne peut pas se prolonger par une fonction de classe C^2 jusqu'à $r = 0$. Pour s'en convaincre, la lectrice pourra vérifier que (t étant fixé),

$$\lim_{r\to 0} u(t, r) = u_0(t) + tu_0'(t) + tu_1(t), \tag{5.2}$$

ce qui montre que si (u_0, u_1) de classe $C^k \times C^{k-1}$, alors $u(t, 0)$ est seulement de classe C^{k-1} (voir aussi l'exercice 1.3). On peut interpréter physiquement ce phénomène de la manière suivante: une singularité sur le cercle $r = r_0$ au temps initial 0 qui voyage à vitesse 1 vers l'origine va se concentrer à l'origine au temps $t = r_0$, occasionnant une singularité plus forte.

La limite (5.2) suggère une perte maximale de régularité d'une dérivée par rapport à la donnée initiale, ce qui est effectivement le cas:

PROPOSITION 5.1. *Soit* $(u_0, u_1) \in (C^3 \times C^2)(\mathbb{R}^3)$ *des fonctions radiales. Alors la formule* (2.3) *prolongée par* $u(t, 0) = u_0(t) + tu_0'(t) + tu_1(t)$*, définit une fonction de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*, radiale par rapport à la variable* x *et qui vérifie* (1.1), (1.3).

La Propositition 5.1 est laissée en exercice à la lectrice.

La formule (5.1) est remarquablement simple. En dimensions d'espace supérieures, on a aussi une formule explicite pour les solutions radiales, de plus en plus compliquée au fur et à mesure que la dimension augmente (cf Exercice 1.4). La perte de régularité observée en dimension 3 d'espace (et absente en dimension 1) augmente avec la dimension, comme le lecteur pourra le vérifier.

Il n'existe pas de formule simple dans le cas radial en dimension paire.

On dispose aussi de formules explicites (bien sûr plus compliquées) sans hypothèse de radialité, en toutes dimensions. Nous allons expliciter ces formules lorsque $N = 3$, puis $N = 2$.

5.2. Solutions générales en dimension 3: moyenne sur les sphères. Si $f \in C^0(\mathbb{R}^3)$. On pose

$$(M_f)(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x + ty) d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S^2_{|t|}} f(x + z) d\sigma(z). \tag{5.3}$$

la moyenne de f sur la sphère de rayon $|t|$ et de centre x. La fonction M_f hérite de la régularité de f (cf exercice 1.6).

THEOREM 2. *Soit* $(u_0, u_1) \in C^3(\mathbb{R}^3) \times C^2(\mathbb{R}^3)$*. Alors l'unique solution* C^2 *de l'équation des ondes* (1.1) *avec condition initiales* (1.3) *est donnée oar*

$$u(t, x) = tM_{u_1}(t, x) + \frac{\partial}{\partial t}(tM_{u_0}(t, x)).$$

PROOF. On commence par vérifier que $tM_{u_1}(t, x)$ est la solution de l'équation des ondes (1.1), de condition initiale $(0, u_1)$. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, si $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} (M_g(t, x)) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} (y \cdot \nabla g)(x + ty) d\sigma(y).$$

Par la formule de la divergence,

$$\int_{S^2} (y \cdot \nabla g)(x+ty) d\sigma(y) = t \int_{|y| \leq 1} (\nabla \cdot (\nabla g)) (x+ty) dy = t \int_{|y| \leq 1} (\Delta g)(x+ty) dy$$
$$= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_{|y|=1} (\Delta g)(x + sy) s^2 ds.$$

On en déduit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(tM_{u_1}(t,x)\right) = M_{u_1}(t,x) + \frac{1}{t}\int_0^t \int_{|y|=1} (\Delta u_1)(x+sy)dys^2ds.$$

et donc

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(tM_{u_1}(t,x)\right) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_0^t \int_{|y|=1} (\Delta g)(x+sy)d\sigma(y)s^2ds$$

$$-\frac{1}{4\pi t^2}\int_0^t \int_{|y|=1} (\Delta u_1)(x+sy)d\sigma(y)s^2ds + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} (\Delta u_1)(x+ty)d\sigma(y)$$

$$= \Delta\left(tM_{u_1}(t,x)\right).$$

Ce qui montre que tM_{u_1} vérifie l'équation des ondes (1.1). De plus, puisque $M_{u_1}(0,x) = u_1(0,x)$, la condition initiale à $t=0$ est bien $(0,u_1)$.

Soit maintenant $v(t,x) = tM_{u_0}(t,x)$. Alors par ce qui précède, v est solution de l'équation des ondes (1.1) avec condition initiale $(0,u_0)$. On en déduit que $\partial_t v$ est solution de l'équation des ondes avec condition initiale $(u_0,0)$, ce qui conclut la preuve. □

Remarquons que l'on peut réécrire la formule du théorème:

$$u(t,x) = tM_{u_1}(t,x) + M_{u_0}(t,x) + tM_{y\cdot\nabla u_0}(t,x). \tag{5.4}$$

On donne maintenant trois conséquences de la formule précédente.

Corollary 5.2 (Principe de Huygens fort). *La solution $u(t,x)$ ne dépend que des valeurs de u_0, ∇u_0, et u_1 sur la sphère de centre x et de rayon $|t|$.*

Remark 5.3. Le principe de Huygens fort est une version plus forte de la vitesse de propagation, qui dit que $u(t,x)$ ne dépend que des valeur de (u_0,u_1) sur la *boule* de centre x et de rayon $|t|$. Ce principe reste valable en toute dimension impaire ≥ 3 (le nombre de dérivées de u_0 et u_1 dans l'énoncé croît avec la dimension). En dimension paire, les solutions vérifient seulement la vitesse finie de propagation: voir §5.3. En dimension 1, comme le montre la formule (2.3), seule les solutions paires en temps (de condition initiale de la forme $(u_0,0)$) vérifient le principe de Huygens fort.

Corollary 5.4 (Dispersion). *Soit $(u_0,u_1) \in (C^3\times C^2)(\mathbb{R}^3)$, à support compact inclus dans la boule $\overline{B}(0,R)$. Alors $|t|-R \leq |x| \leq t+R$ sur le support de x et*

$$|u(t,x)| \lesssim \frac{C}{|t|}.$$

Proof. L'affirmation sur le support découle du principe de Huygens fort (Corollaire 5.2). La deuxième affirmation est une conséquence de la formule (5.4). En effet, on a: $M_{u_1}(t,x) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S_t^2} u_1(x+y)dy$. L'intégrant est nul en dehors de l'ensemble

$$\{y \in S_t^2 \ :\ x+y \in \operatorname{supp}(u)\},$$

dont la mesure uniformément bornée indépendamment de t et de x. On a donc bien

$$|tM_{u_1}(t,x)| \leq \frac{C}{t},$$

où la constant C ne dépend que de $\sup_x |u_1(x)|$ et de R. Le même raisonnement permet de borner les autres termes. □

On donne finalement une propriété de positivité de l'équation des ondes en dimension d'espace 3 (qui a des analogues en dimensions 1 et 2, mais est complètement fausse à partir de la dimension 4).

COROLLARY 5.5 (Positivité). *Soit* $(u_0, u_1) \in (C^3 \times C^2)(\mathbb{R}^3)$ *tels que*

$$\forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad u_1(x) + x \cdot \nabla u_0(x) \geq 0 \ \textit{et}\ u_0(x) \geq 0.$$

Alors

$$\forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad u(t,x) \geq 0.$$

PROOF. Ceci découle immédiatement de la formule (5.4). □

5.3. Dimension $1+2$**.** Une solution u de l'équation (1.1) avec $N = 2$ et également une solution de la même équation avec $N = 3$, constante par rapport à la 3-ième coordonnée d'espace. On peut déduire du théorème 2 une expression de u à partir des donnée initiales. Cette stratégie est appelée “méthode de la descente”.

THEOREM 3. *Soit* $(u_0, u_1) \in (C^3 \times C^2)(\mathbb{R}^2)$*. Alors l'équation* (1.1) *a une unique solution de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$*, donnée par la formule*

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial_t}\left(t\int_{|y|\leq 1}\frac{u_0(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right) + t\int_{|y|\leq 1}\frac{u_1(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right]. \tag{5.5}$$

PROOF. L'unicité découle du théorème 1. Par ailleurs, comme dans la preuve du théorème 2, la formule pour les solutions paires en temps (de condition initiale $(u_0, 0)$) se déduit aisément de la formule pour les solutions impaires en temps (de condition initiale $(0, u_1)$). On ne traite donc que ce deuxième cas.

Soit donc u une solution C^2 de (1.1) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$,de donnée initiale $(u, \partial_t u)(0) = (0, u_1)$, avec $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Par le théorème 2, en considérant u comme une solution sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on obtient:

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} \tilde{u}_1((x_1, x_2, 0) + ty)d\sigma(y)dy,$$

où par définition $\tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2)$. En passant en coordonnées sphériques, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{S^2} \tilde{u}_1((x_1, x_2, 0) + ty)d\sigma(y) \\
&\qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_1(x_1 + t\sin\theta\cos\varphi, x_2 + t\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \\
&\qquad\quad = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} u_1(x_1 + t\sin\theta\cos\varphi, x_2 + t\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

La formule annoncée découle alors du changement de variable $y_1 = t\sin\theta\cos\varphi$, $y_2 = t\sin\theta\sin\varphi$. □

On voit sur la formule du théorème 3 que le principe de Huygens fort n'est pas vérifié en dimension $1+2$: la solution $u(t,x)$ dépend des valeurs de la condition initiale sur toute la boule $B_{|t|}(x)$, et non seulement sur la sphère $\{x\ :\ |x| = |t|\}$.

6. Lois de conservation

L'énergie d'une solution u sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ est définie par:

$$E(\vec{u}(t)) = \int_{\mathbb{R}^N} e_u(t,x)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \Big((\partial_t u(t,x))^2 + |\nabla u(t)|^2\Big)dx.$$

C'est la version globale de l'énergie locale considérée en §4. L'énergie d'une solution est conservée au cours du temps.

THEOREM 4. *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^{1+N})$ une solution de* (1.1), (1.3). *On suppose (u_0, u_1) d'énergie finie. Alors pour tout t, $E(\vec{u}(t))$ est finie et $E(\vec{u}(t)) = E(u_0, u_1)$.*

PROOF. On a envie d'écrire

$$\frac{d}{dt}(E(\vec{u}(t))) = \int \partial_t e_u(t,x)dx = \int \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u)dx = 0,$$

mais la dernière égalité, obtenue par une intégration par partie en ignorant le terme "au bord" (c'est à dire quand $|x| \to \infty$) est purement formelle. Pour justifier le calcul précédent, on peut utiliser la décroissance de l'énergie locale (lemme 4.1). Pour $R > 0$, on note:

$$E_{<R}(\vec{u}(t)) = \int_{|x|<R} e_u(t,x)dx.$$

Remarquons que cette quantité est finie dès que $u \in C^1(\mathbb{R}^{1+N})$. On fixe $t > 0$ Par le lemme 4.1, pour tout $R > t$,

$$E_{<R-t}(\vec{u}(t)) \leq E_{<R}(\vec{u}(0)) \leq E(u_0, u_1).$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient que $E(\vec{u}(t))$ est finie, et

$$E(\vec{u}(t)) \leq E(u_0, u_1).$$

En inversant le sens du temps, on obtient aussi l'inégalité

$$E(u_0, u_1) \leq E(\vec{u}(t)).$$

On a montré que l'énergie est conservée pour $t \geq 0$. En appliquant ce résultat à la solution $(t,x) \mapsto u(-t,x)$, on obtient la conservation de l'énergie pour $t \leq 0$, ce qui conclut la preuve. □

Il existe une autre quantité conservée (vectorielle), le moment, défini par

$$P(\vec{u}(t)) = \int \partial_t u(t,x)\nabla u(t,x)dx \in \mathbb{R}^N.$$

PROPOSITION 6.1. *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^{1+N})$ une solution de* (1.1) *d'énergie finie. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(\vec{u}(t)) = P(u_0, u_1).$$

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice (cf exercice 1.8).

7. Tranformations de Lorentz. Hyperplans de type temps

L'*espace-temps de Minkowski* de dimension N est l'espace $\mathbb{R}^{1+N}$, muni de la forme quadratique de signature $(1,N)$:

$$g(X) = x_0^2 - \sum_{j=1}^{N} x_j^2 = t^2 - |x|^2 = {}^tXJX,$$

où ${}^tX$ est la transposée de X,

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_N),\ t = x_0,\ x = (x_1, \dots, x_N),$$

et $J = [J_{\mu,\nu}]_{0 \leq {\mu \atop \nu} \leq N}$ est la matrice telle que $J_{0,0} = 1$, $J_{\ell,\ell} = -1$ si $\ell \in \{1, \dots, N\}$ et $J_{\mu,\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$.

Le groupe de Lorentz $\mathcal{O}(1,N)$ est le groupe des matrices réelles carrées P de taille $1+N$ qui laissent invariantes la forme quadratique g, i.e. telles que $g(PX) = g(X)$ pour tout X de $\mathbb{R}^{1+N}$. En d'autres termes si P est une matrice $(1+N)\times(1+N)$,

$$P \in \mathcal{O}(1,N) \iff {}^tPJP = J.$$

LEMMA 7.1. *Soit $P \in \mathcal{O}(1,N)$, $v \in C^2(\mathbb{R}^{1+N})$ et $w(X) = v(PX)$. Alors*

$$(\partial_t^2 - \Delta)v = 0 \iff (\partial_t^2 - \Delta w) = 0.$$

PROOF. On remarque qu'une fonction v de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{1+N}$ vérifie l'équation des ondes (1.1) si et seulement si $\mathrm{Tr}(Jv'') = 0$, où v'' est la matrice hessienne $\left[\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu} v\right]_{0 \leq {\mu \atop \nu} \leq N}$.

Un calcul explicite donne $w''(X) = {}^tPv''(Px)P$, et donc

$$\mathrm{Tr}(Jw''(X)) = \mathrm{Tr}(J\,{}^tPv''(PX)P) = \mathrm{Tr}(PJ\,{}^tPv''(PX)) = \mathrm{Tr}(v''(PX)),$$

ce qui montre le résultat annoncé. □

Deux exemples importants d'élément de $\mathcal{O}(1,N)$ sont données par les rotations d'espaces:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix}, \quad R \in \mathcal{O}_N \tag{7.1}$$

et les transformations de Lorentz, telles que:

$$\mathcal{R}_\sigma = \begin{bmatrix} R_\sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{N-1}. \end{bmatrix}, \quad R_\sigma = \begin{bmatrix} \cosh(\sigma) & \sinh(\sigma) \\ \sinh(\sigma) & \cosh(\sigma) \end{bmatrix}, \tag{7.2}$$

où I_{N-1} désigne la matrice la matrice identité $(N-1)\times(N-1)$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. Dans ces formules, $\mathbf{0}$ désigne toujours une matrice de 0 de taille adaptée.

Dans les parties précédentes, on a considéré le problème de Cauchy avec des conditions initiales sur un hyperplan de $\mathbb{R}^{1+N}$ de la forme $\{t = t_0\}$. On cherche maintenant à résoudre le même problème en prescrivant une condition initiale sur d'autres hyperplans. On considère donc un hyperplan de la forme

$$\Pi = \{X \in \mathbb{R}^{1+N} \ :\ {}^tAX = 0\} \tag{7.3}$$

où $A \in \mathbb{R}^{1+N} \setminus \{0\}$, $A = (a_0, a_1, \dots, a_N) = (a_0, a)$.

On a:

THEOREM 5. *Supposons $|a_0| > |a|$. Alors il existe une transformation $P \in \mathcal{O}(A,N)$ telle que*

$$\Pi = P\left(\{(0,x),\ x \in \mathbb{R}^N\}\right).$$

La démonstration de ce théorème est laissée en exercice. Cf exercice 1.11.

Si la condition du théorème précédent est vérifiée, on peut donc ramener le problème de Cauchy avec une condition initale

$$u_{\restriction \Pi} = u_0, \quad A \cdot \nabla u_{\restriction \Pi} = u_1,$$

à un problème de Cauchy avec conditions initiales à $t = 0$ comme traité plus haut.

Definition 7.2. L'hyperplan Π est dit *de type temps* quand $A = (a_0, a)$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^N$ et $|a_0| > A$.

On peut démontrer que Π est de type temps si et seulement si la restriction de la forme quadratique g à Π est définie négative.

8. Équation avec second membre

On considère maintenant l'équation avec second membre (1.4). Nous allons exprimer cette solution en fonction du propagateur de l'équation libre (1.1). Pour $(u_0, u_1) \in C^3 \times C^2(\mathbb{R}^3)$, on note $S_L(t)(u_0, u_1)$ la solution de (1.1), de donnée initiale (u_0, u_1) à $t = 0$. On notera $S(t)u_1 = S_L(t)(0, u_1)$, de telle manière que

$$S_L(t)(u_0, u_1) = \frac{\partial}{\partial t}\left(S(t)u_0\right) + S(t)u_1.$$

Pour $u_1 \in C^2$, on rappelle que

$$(S(t)u_1)(x) = tM_{u_1}(t, x) = t \int_{S^2} u_1(x + ty) d\sigma(y).$$

Theorem 6 (Formule de Duhamel). *Soit* $(u_0, u_1) \in (C^2 \times C^3)(\mathbb{R}^3)$ *et* $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. *Alors l'équation* (1.4), (1.3) *a une unique solution de classe* C^2, *donnée par la formule:*

$$u(t) = S_L(t)(u_0, u_1) + \int_0^t S(t - s)f(s)ds.$$

Remark 8.1. On peut expliciter le terme de Duhamel, cf (8.1).

Preuve du théorème 6. L'unicité découle immédiatement du Théorème 1, puisque la différence de 2 solutions de (1.4) avec le même second membre f est une solution de (1.1). Pour l'existence, en tenant compte du Théorème 2, il suffit de vérifier que la fonction

$$U : (t, x) \mapsto \int_0^t S(t - s)f(s)ds$$

est de classe C^2 et vérifie l'équation (1.4) avec conditions initiales nulles.

On a:

$$U(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t - s) \int_{S^2} f(s, x + (t - s)y) d\sigma(y) ds, \tag{8.1}$$

et le fait que U soit de classe C^2 découle du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

De plus, en utilisant que $S(0)g = 0$ pour toute fonction g,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Big(S(t - s)f(s)\Big) ds.$$

En dérivant à nouveau, on obtient

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(S(t-s)f(s)\Big)_{\restriction s=t} + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(S(t-s)f(s)\Big)ds$$
$$= f(t) + \int_0^t \Delta\Big(S(t-s)f(s)\Big)ds = f(t) + \Delta U.$$

où on a utilisé que $\frac{\partial}{\partial t}(S(t)g)_{\restriction t=0} = g$ pour toute fonction g de classe C^2. □

REMARK 8.2. La formule de Duhamel n'est bien sûr pas spécifique à la dimension 3, comme le montre le calcul qui conduit à cette formule, qui est complètement indépendant de la dimension. Le lecteur est invité à réécrire explicitement la solution de l'équation (1.4) lorsque $N = 1$ et $N = 2$.

On déduit de la formule de Duhamel l'inégalité d'énergie:

PROPOSITION 8.3. *Soit u une solution C^2 de (1.4) avec $N = 3$ de donnée initiale (u_0, u_1), telle que $f \in C^2(\mathbb{R}^{1+3})$. On suppose de plus que (u_0, u_1) d'énergie finie, et pour tout $T > 0$, $\int_{[-T,+T]} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |f(t,x)|^2 dx} dt < \infty$. Alors pour tout $t > 0$,*

$$\sqrt{E(\vec{u}(t))} \leq \sqrt{E(u_0, u_1)} + \int_0^t \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |f(s,x)|^2 dx} ds.$$

PROOF. D'après la formule de Duhamel et la conservation de l'énergie pour l'équation libre (1.1), il suffit de vérifier que pour tout $T > 0$,

$$\sqrt{E\left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds, \partial_t \int_0^t S(t-s)f(s)ds\right)} \leq \int_0^t \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |f(s,x)|^2 dx} ds.$$

Par conservation de l'énergie (Théorème 4), on a $\sqrt{E}(S(t-s)f(s)ds, \partial_t \int_0^t S(t-s)f(s)ds) = \|f(s)\|_{L^2}$. On en déduit (en utilisant que $\sqrt{E}$ est une norme)

$$\sqrt{E\left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds, \partial_t \int_0^t S(t-s)f(s)ds\right)} \leq \int_0^t \|f(s)\|_{L^2} ds,$$

ce qui conclut la preuve. □

9. Exercices

EXERCICE 1.1. Soit $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Calculer la solution de l'équation (1.4), en dimension d'espace $N = 1$, de condition initiale $(0, 0)$ à $t = 0$.

EXERCICE 1.2. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(N \geq 1)$. On suppose que f est radiale, c'est à dire qu'elle ne dépend que de la variable $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}$. On note $f(x) = g(|x|)$, où $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$.

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^N$ si et seulement si g est continue sur $[0, \infty[$.
(2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^N$ si et seulement si g est de classe C^1 sur $[0, \infty[$ et $g'(0) = 0$.
(3) Montrer que pour tout $k \geq 2$, f est de classe C^k sur $\mathbb{R}^N$ si et seulement si g est de classe C^k sur $\mathbb{R}^N$ et $g^{(j)}(0) = 0$ pour tout entier impair $j \leq k$.
(4) En supposant f de classe C^1, déterminer $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en fonction de g', $j = 1, \ldots, N$. Déterminer $g'(r)$ en fonction de ∇f.

(5) En supposant f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^N$, montrer la formule

$$\Delta f(x) = g''(|x|) + \frac{N-1}{|x|} g'(|x|).$$

En pratique, on utilise la même notation (f) pour les fonctions f et g, et on note $g' = \frac{df}{dr}$, etc...

Exercice 1.3. Soit $k \geq 0$ et $f \in C^0(\mathbb{R}^3)$ une fonction *radiale*. On définit une fonction u sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, radiale par rapport à la variable d'espace, par

$$u(t,r) = \frac{1}{2r} \left((r+t) f(|r+t|) + (r-t) f(|r-t|) \right).$$

On remarque que u définit une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right)$.

(1) On suppose que f est à support dans l'anneau $\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}$, telle que pour $|\eta - 1| \leq 1/10$,

$$f(\eta) = \begin{cases} 2 - \eta & \text{si } \eta > 1 \\ \eta & \text{si } \eta < 1 \end{cases}.$$

Calculer $\lim_{r \to 0} u(t,r)$ lorsque $t = 1$, $t > 1$ et $t < 1$ (proches de 1). En déduire que u ne peut pas être prolongée à une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

(2) Donner de même un exemple de fonction f de classe C^2 telle que u ne peut pas être prolongée à une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

(3) Supposons f de classe C^3. Montrer que u définit une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

(4) Soit g une fonction radiale sur $\mathbb{R}^3$, de classe C^2. Montrer que

$$u(t,r) = \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \sigma g(|\sigma|) d\sigma,$$

se prolonge à une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.4 (Solution de l'équation des ondes radiale en dimension impaire). Soit $N \geq 3$ un entier impair, que l'on écrit $N = 2k+1$. On note T_k l'opérateur défini par

$$T_k \phi = \left(r^{-1} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \phi(r) \right).$$

(1) Montrer que

$$T_k \varphi = \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^{j+1} \phi^{(j)} r,$$

pour des $c_j \in \mathbb{R}$. Déterminer c_0 et c_{k-1}.

(2) Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C^{k+1}([0, +\infty[)$,

$$\frac{d^2}{dr^2}(T_k \varphi) = \left(r^{-1} \frac{d}{dr} \right)^k (r^{2k} \varphi'(r)).$$

Indication: on pourra commencer par vérifier que la formule est vraie lorsque $\varphi(r) = r^m$ pour tout entier m.

(3) On se donne une solution $u(t,x)$ de l'équation des ondes linéaires en dimension d'espace N, que l'on suppose radiale par rapport à la variable d'espace. On suppose u de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}^{1+N}$. Montrer
$$(\partial_t^2 - \partial_r^2)(T_k u) = 0.$$
En déduire une expression de $T_k u$ en fonction de u_0 et u_1.

(4) Exprimer $u(t,r)$ en fonction de u_0 et u_1 lorsque $N = 5$. Quelle régularité de u_0 et u_1 faut-il supposer pour que u soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{1+5}$?

EXERCICE 1.5. Soit u une solution de l'équation des ondes (1.1) en dimension d'espace $N \geq 3$, radiale par rapport à la variable d'espace. On rappelle que $\Delta u = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}$. On suppose $u \in C^2(\mathbb{R}^{1+N})$, avec données initiales à support compact. Soit
$$v(t,r) = \int_r^{\infty} \rho \partial_t u(t,\rho) d\rho.$$
Montrer que v définit une solution radiale, de classe C^2, de l'équation des ondes en dimension d'espace $N-2$.

EXERCICE 1.6. Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^3)$. Montrer que la fonction M_f, définie par (5.3) est aussi de classe C^k.

EXERCICE 1.7. Soit $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ une solution de (1.1) d'énergie finie. Montrer
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \int_{|x|>R+|t|} e_u(t,x)dx \leq \varepsilon.$$

EXERCICE 1.8 (Conservation du moment). (1) Soit u une solution C^2 de (1.1) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et $j \in \{1, \ldots N\}$. Soit $p_{j,u}(t,x) = \partial_{x_j} u(t,x) \partial_t u(t,x)$. Montrer
$$\frac{\partial p_{j,u}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left((\partial_t u)^2 - |\nabla u|^2\right) + \nabla \cdot V,$$
où V est un certain champ de vecteur C^1 que l'on précisera.

(2) Justifier que
$$P_j(\vec{u}(t)) = \int_{\mathbb{R}^N} p_{j,u}(t,x)dx$$
est défini pour tout temps. Montrer que cette quantité est indépendante du temps. On pourra commencer par considérer une version locale du moment
$$\int_{[-R,R]^N} p_{j,u}(t,x)dx \text{ ou } \int_{\mathbb{R}^N} p_{j,u}(t,x)\varphi\left(\frac{x}{R}\right)dx$$
puis faire tendre R vers $+\infty$. Ici φ désigne une fonction C^2 à support compact qui vaut 1 dans un voisinage de l'origine.

EXERCICE 1.9. On suppose $N = 1$ ou $N = 2$. Soit u la solution de (1.1), (1.3), avec $(u_0, u_1) \in C^3 \times C^2$ (si $N = 2$) ou $C^2 \times C^1$ (si $N = 1$). Donner des conditions suffisantes sur u_0 et u_1 pour que:
$$\forall t \geq 0, \quad u(t,x) \geq 0.$$

EXERCICE 1.10. On suppose $N = 1$ ou $N = 2$. Soit u une solution de (1.4), avec $u_0 = u_1 = 0$, et f de classe C^1 (si $N = 1$) ou C^2 (si $N = 2$). Exprimer u en fonction de f.

Exercice 1.11.
(1) Démontrer le Théorème 5. On pourra utiliser des composées des transformations définies en (7.1) et (7.2).
(2) Démontrer que Π est de type temps si et seulement si la restriction de la forme quadratique g à Π est définie négative.
(3) A quelle condition sur A existe-t-il $B = (b_0, b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ pour que la fonction
$$e^{A\cdot X + iB\cdot X}$$
soit solution de (1.1)?
(4) Supposons maintenant que l'hyperplan Π n'est pas de type temps. Soit $Y \notin \Pi$. Construire une suite de solutions $(u_n)_n$ de (1.1) telle que $u_n(X) = 0$ sur Π, telle que pour toute opérateur différentiel $D = \prod_{j=1}^{N} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N}$ (d'ordre aussi grand que l'on veut), il existe $C > 0$ tel que $|Du_n(X)| \leq Ce^{-n}$ sur Π, mais $|u_n(Y)| \to +\infty$ quand $n \to \infty$.

Bibliography

[1] Folland, G. B. *Introduction to partial differential equations.*, 2nd ed. ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.