Examen partiel du 23 février 2012

Durée: 2h50. Tout document et appareil électronique est interdit.

Il est fortement conseillé de vérifier les résultats trouvés, en particulier ceux des exercices 1 et 3.

Exercice 1. Le paramètre $m \in \mathbb{R}$ étant fixé, on considère le système, d'inconnues réelles x, y et z:

$$(S_m) \qquad \begin{cases} 2x + y + (7+4m)z = 2 + 2m \\ 4x + (10+7m)z = 4m \\ 2x + 3y + (13+6m)z = 6 + 2m. \end{cases}$$

a) Résoudre (S_m) lorsque $m = 0$.
b) Résoudre (S_m) dans le cas général, suivant la valeur de $m \in \mathbb{R}$.
c) En utilisant la question précédente, dire *sans calcul supplémentaire* pour quelles valeurs de m le système

$$(T_m) \qquad \begin{cases} 2x + y + (7+4m)z = 0 \\ 4x + (10+7m)z = 1 \\ 2x + 3y + (13+6m)z = -1. \end{cases}$$

a une unique solution.

Exercice 2. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$. Parmi les produits AB, AC, BA, BC, CA, CB lesquels sont définis? Calculer ces produits lorsqu'ils sont définis.

Exercice 3.
a) Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Calculer leurs inverses si c'est le cas. Aucune réponse dans preuve ne sera prise en compte. Les calculs intermédiaires devront figurer sur la copie.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

b) Résoudre les systèmes suivants:

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ -x+y-2z=0 \\ x+2y-3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y-4z=-2 \\ -x+y-2z=1 \\ x+2y-3z=1. \end{cases}$$

Indication: il est conseillé d'utiliser la question précédente.

Exercice 4.

a) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Justifier précisément chaque réponse.

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x+y+z=0\right\}, \quad F_2 = \{(a,a,a),\ a \in \mathbb{R}\}$$
$$F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } xyz=0\right\}, \quad F_4 = \{(0,0,0)\}$$
$$F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x+y=1 \text{ et } x+z=-1\right\}.$$

b) Calculer $F_1 \cap F_2$.

c) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pour quel(s) $a \in \mathbb{R}$ a-t-on $(x,y,z)-(a,a,a) \in F_1$?

d) Montrer à l'aide de la question précédente que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

e) La somme $F_1 + F_2$ est-elle directe? Peut-on dire que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5. On note $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Soit

$$E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } AM = MA\}, \quad F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } BM = MB\}.$$

a) Montrer que E, F et $E \cap F$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A quelles conditions sur a, b, c, d a-t-on $M \in E$? $M \in F$?

c) Montrer que $E \cap F = \text{vect}\,(H)$, où H est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on précisera.