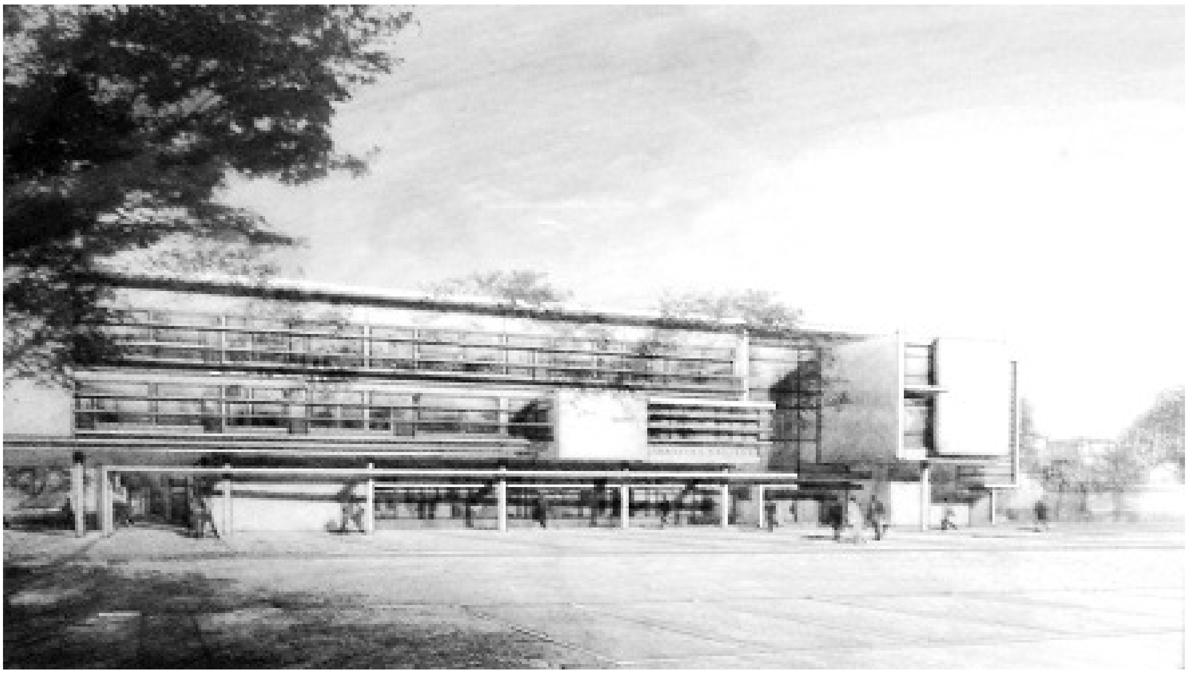
Institut Galilée

Sciences et technologies



Licence $1^{\text{ère}}$ année

Cours d'algèbre linéaire : première partie.

Version du 6 février 2014.

Deuxième semestre

Département de Mathématiques

www.math.univ-paris13.fr/departement/index.php/fr/

I. Les nombres complexes

Pour les deux premiers chapitres, le lecteur pourra consulter le livre de Liret et Martinais [1].

I.1. Les nombres réels ne suffisent pas

I.1.a. L'équation du second degré à coefficients réels

Dans de nombreux problèmes on rencontre une équation du type :

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{E}$$

d'inconnue réelle x, avec a, b, c des réels et $a \neq 0$. Pour résoudre une telle équation du *second degré à une inconnue*, on écrit

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right)$$

et on reconnaît le début du développement de

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

d'où

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \tag{I.1}$$

On note Δ le discriminant $b^2 - 4ac$. Puisque a est non nul, l'équation (E) est équivalente à sa *forme canonique* :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{I.2}$$

et on distingue trois cas :

1. François Liret et Dominique Martinais. *Algèbre 1re année - Cours et exercices avec solutions.* Dunod, deuxième édition, 2003

– **Premier cas** : si $\Delta > 0$, on peut écrire : $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ et l'équation (E) devient :

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0. \tag{I.3}$$

Il y a alors 2 solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On peut factoriser $ax^2 + bx + c$. D'après (I.1) on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

– **Deuxième cas** : si $\Delta = 0$, l'équation (E) devient $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Elle admet une seule solution (double) $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a la factorisation :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

– **Troisième cas** : si $\Delta < 0$, on a :

$$ax^2 + bx + c = a \underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{strictement positif car } \Delta<0}.$$

On en déduit que l'équation (E) n'a pas de racine réelle et que $ax^2 + bx + c$ ne peut pas se factoriser (sur $\mathbb{R}$). Plus précisément, on ne peut pas écrire $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exemples I.1.1.

a. Résoudre $2x^2 - 8x + 6 = 0$. Peut-on factoriser $2x^2 - 8x + 6$?

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 = 4^2 > 0$. Les solutions sont donc $x_1 = \dfrac{-(-8) - 4}{2 \times 2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-8) + 4}{2 \times 2} = 3$. On en déduit :

$$2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 1)(x - 3).$$

b. Résoudre $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Peut-on factoriser (sur $\mathbb{R}$) $3x^2 - 12x + 12$?

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 0$. Elle admet une seule solution $x_0 = -\dfrac{-12}{2 \times 3} = 2$ et on a :

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2.$$

c. Résoudre $2x^2+8x+9=0$. Peut-on factoriser (sur $\mathbb{R}$) $2x^2+8x+9$?

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 9 = -8 < 0$.

Il n'y a donc pas de solution réelle et $2x^2+8x+9$ ne peut pas se factoriser (sur $\mathbb{R}$).

Exercice I.1.2. Résoudre :

$$6x^2 - x - 1 = 0, \qquad 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0, \qquad \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Peut-on factoriser ?

I.1.b. Un peu d'histoire

Nous venons de voir que toutes les équations de degré 2 n'admettent pas nécessairement de racine réelle. En particulier, l'équation simple $x^2=-1$ soit :

$$x^2+1=0$$

n'admet pas de solution dans les nombres réels. Pour y remédier, les mathématiciens ont introduit un nombre dit *imaginaire* noté i tel que $i^2=-1$ et construit les *nombres complexes*.

L'introduction de ces nouveaux nombres remonte au XVI^{eme} siècle. Les algébristes italiens de l'université de Bologne (Del Ferro, Tartaglia, Cardan, ...), ont découvert les formules permettant de résoudre les équations polynomiales du troisième degré, comme par exemple

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Ils ont constaté un fait qui leur a paru incompréhensible. Chaque fois qu'une équation de ce type possède trois solutions réelles, comme 1, 2 et -3 pour l'équation précédente, les formules qui leur permettaient de calculer ces solutions faisaient intervenir des racines carrées de nombres négatifs. Ils ont alors considéré ces racines carrées comme *nouveaux nombres* qu'ils ont appelés *nombres impossibles*. Néanmoins l'introduction de ces nouveaux nombres ne s'est pas faite sans mal.

La suite est tirée de *Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes* IREM, éd. Ellipse. p. 157.

En 1637, Descartes dans sa *Géométrie*, propose d'accepter comme solution d'une équation non seulement les nombres négatifs, mais aussi ceux qui pourraient comporter une racine carrée d'un nombre négatif. Il justifie ceci par un théorème qui ne sera vraiment démontré qu'au XIX^{eme} siècle et qui deviendra le théorème fondamental de l'algèbre :

> *Une équation de degré n admet n solutions, si on accepte les négatives, celles qui comportent une racine carrée d'un nombre négatif et les multiplicités.*

La construction rigoureuse des nombres complexes n'a été achevée qu'à la fin du XVIII^{eme} siècle. La notation définitive est due à Euler. Dans *Eléments d'algèbre* il écrit en 1774 en s'inspirant des règles de calcul pour les racines carrées des nombres positifs :

Maintenant comme $-a$ signifie autant que $+a$ multiplié par -1, et que la racine carrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multiplié par -1, ou $\sqrt{-a}$, est autant que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{-1}$.

Or $\sqrt{a}$ est un nombre possible ou réel, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire, peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$. Par cette raison donc, $\sqrt{-4}$ est autant que $\sqrt{4}$ multiplié par $\sqrt{-1}$ et autant que $2.\sqrt{-1}$, à cause de $\sqrt{4}$ égale à 2. Par la même raison $\sqrt{-9}$ se réduit à $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$, ou $3\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-16}$ signifie $4\sqrt{-1}$.

De plus comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$.

Exercice I.1.3.

a. D'après la définition, à quoi est égal $(\sqrt{-1})^2$?
En appliquant les règles du calcul algébrique calculez $\sqrt{-1}\ .\ \sqrt{-1}$.
Ces deux résultats sont-ils compatibles ?

b. Euler écrit aussi $\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = \sqrt{6}$! Or, suivant la démarche d'Euler, on va écrire

$$\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = \sqrt{2}.\sqrt{-1}.\sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{2}.\sqrt{3}.(\sqrt{-1})^2 = ... = ...$$

Ces deux égalités sont-elles compatibles ?

Il est donc difficile d'utiliser la notation $\sqrt{-a}$ pour un réel $a > 0$, et de continuer à utiliser les règles de calcul connues pour les nombres positifs. Euler va lui-même s'apercevoir de ces contradictions. Aussi décidera-t-il de noter par i (début d'imaginaire ou impossible) la quantité qu'il notait $\sqrt{-1}$.

On peut tout de suite noter la règle suivante :

La notation *racine carrée* $\sqrt{}$ ne s'utilise qu'avec des nombres réels positifs

I.2. Forme cartésienne d'un nombre complexe, addition et multiplication

I.2.a. Rappel : produit cartésien de deux ensembles

Définition I.2.1. Soit A et B deux ensembles. Le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. On note $A^2 = A \times A$.

En particulier $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels (x, y). L'ordre est important : par définition, $(x, y) = (x', y')$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, $(1, 2) \neq (2, 1)$.

I.2.b. Construction des nombres complexes

Nous avons vu qu'il a été nécessaire d'introduire des nombres ayant un carré négatif. Pour ce faire, on va construire un ensemble muni de deux opérations, l'ensemble des nombres complexes, qui contient les nombres réels et des nombres dits imaginaires, dont le nombre i vérifiant $i^2 = -1$.

Par définition, $\mathbb{C}$ (l'ensemble des *nombres complexes*) est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations suivantes.

– *Addition :*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

– *Multiplication :*

$$(x, y).(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Si $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, le nombre réel x est appelé *partie réelle de* z et noté $\operatorname{Re} z$. Le nombre réel y est appelé *partie imaginaire de* z et noté $\operatorname{Im} z$. Par définition, deux nombres complexes z et z' sont égaux lorsque leurs parties réelle et imaginaire sont égales.

Un nombre complexe de la forme $(x, 0)$ est dit réel et simplement noté x, ce qui permet d'identifier $\mathbb{R}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. En effet, l'addition et la multiplication complexes restreintes aux nombres réels coïncident avec l'addition et la multiplication réelles :

$$(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0), \quad (x, 0).(x', 0) = (xx', 0).$$

Un nombre complexe de la forme $(0, y)$ est appelé *nombre imaginaire pur* et noté iy. Le seule nombre réel et imaginaire pur est le nombre $(0, 0)$, noté simplement 0. On note i le nombre complexe $1i$. Par définition de la multiplication sur les nombres complexes, on a :

$$i^2 = -1.$$

Compte tenu de l'identification précédente et de la définition de l'addition complexe, tout nombre complexe s'écrit $(x, y) = x+iy$: cette écriture est appelée *forme cartésienne* d'un nombre complexe. Elle est unique : si x, x', y et y' sont des nombres réels,

$$x + iy = x' + iy' \iff \big(x = x' \text{ et } y = y'\big).$$

On utilisera désormais *systématiquement* la notation $x + iy$, au lieu de (x, y).

Pour récapituler, on peut oublier la construction précédente, et décrire $\mathbb{C}$ comme suit. **Les nombres complexes sont les nombres $z = x + iy$ où x (la partie réelle de z) et y (la partie imaginaire de z) sont des nombres réels, et $i^2 = -1$. Ils s'additionnent et se multiplient de la manière suivante :**

$$(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y') \tag{I.4}$$

$$(x + iy).(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx'). \tag{I.5}$$

Remarque I.2.2. Le produit $z.z'$ de deux nombres complexes z et z' est aussi noté zz' ou $z \times z'$.

I.2.c. Propriétés de l'addition et de la multiplication

Toutes les propriétés de l'addition et de la mutiplication dans $\mathbb{R}$ (commutativité, associativité, distributivité...) restent vraies dans $\mathbb{C}$. Ainsi, il est facile de vérifier que (à faire au moins une fois) :

i. $z + 0 = 0 + z = z$, $1z = z1 = z$ et $0z = z0 = 0$.

ii. $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$.

iii. $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ et $z(z'z'') = (zz')z''$.

iv. $z(z' + z'') = zz' + zz''$.

Remarque I.2.3. On peut écrire la somme (respectivement le produit) de trois nombres complexes z, z' et z'', sans parenthèse : $z + z' + z''$ (respectivement $z\,z'\,z''$). Ces notations ne sont pas ambiguës du fait de l'associativité de l'addition et de la multiplication iii.

Remarque I.2.4. Il est inutile d'apprendre par coeur la formule (I.5) définissant la multiplication de deux nombres complexes. Elle se retrouve immédiatement en utilisant les propriétés précédentes et le fait que $i^2 = -1$:

$$(x + iy)(x' + iy') = xx' + iyx' + xiy' + iyiy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$$

Remarque I.2.5. La formule du binôme ainsi que les formules des sommes de suites arithmétiques et géométriques découlent des propriétés standard de l'addition et de la multiplication : elles restent vraies pour des nombres complexes. Ces formules sont à savoir. Elles sont rappelées en appendice (cf I.7.b, I.7.c).

I.2.d. Représentation dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

i. Par construction de $\mathbb{C}$ (I.2.b plus haut), le nombre complexe z de forme cartésienne $x + i\,y$ est naturellement associée au point M de coordonnées (x, y).
   M est *l'image ponctuelle* de z et z est *l'affixe* de M.
ii. On associe aussi le nombre complexe z de forme cartésienne $x + i\,y$ avec le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$. $\vec{v}$ est *l'image vectorielle* de z et z est *l'affixe* du vecteur $\vec{v}$.

Par définition, deux nombres complexes sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

$$x + iy = x' + iy' \quad \text{si et seulement si} \quad x = x' \text{ et } y = y',$$

c'est à dire si et seulement si leurs images (ponctuelle ou vectorielle) sont confondues.

On peut facilement interpréter géométriquement l'addition sur $\mathbb{C}$. Étant donnés deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, si on note $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ les vecteurs du plan complexe d'affixes z et z', le nombre $z+z'$ est l'affixe du vecteur $\vec{v}+\vec{v}'$ (la somme s'obtient par la loi du parallélogramme) (c.f. figure I.1 p. 7).

I.3. Autres opérations sur les nombres complexes

On a vu la définition de l'addition et la multiplication de deux nombres complexes. On définit ici d'autres opérations sur ces nombres : opposé, différence, conjugaison et module.

I.3.a. Opposé, différence de nombres complexes

Pour tout $z = x + yi \in \mathbb{C}$, le nombre complexe $-1z = -x + (-y)i$ est l'unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$; ce nombre complexe est *l'opposé* de z et on le note simplement $-z$. La différence $z - z'$ de deux nombres complexes, est alors définie par $z - z' = z + (-z')$.

I.3.b. Conjugaison et module

Définition I.3.1.

Si $z \in \mathbb{C}$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, le nombre complexe $\overline{z} = x - yi$ est appelé le *complexe conjugué* de z.

Le nombre réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé le *module* de z.

La conjugaison est une involution :

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

Un calcul simple (à faire) montre :

$$|z|^2 = z\overline{z}. \tag{I.6}$$

Par ailleurs

$$|z|^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0 \iff z = 0.$$

Interprétation géométrique

Soit z un nombre complexe, d'affixe M. Le conjugué $\overline{z}$ de z a pour affixe M', l'image de M par la symétrie d'axe Ox. Le module de z est la distance OM (cf figure I.1 p. 7).

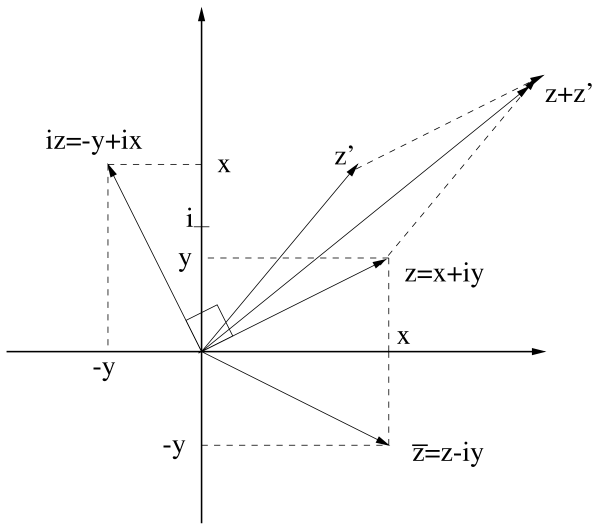


Figure I.1.: Le plan complexe : coordonnées cartésiennes

Compatibilité avec l'addition et la multiplication

– Concernant la conjugaison on a :

i. $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}'$ et $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$.

ii. $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

iii. $z = \bar{z}$ si et seulement si z est réel.

iv. $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est imaginaire pur.

Les preuves sont laissées au lecteur. On retiendra que la conjugaison est compatible avec les opérations (propriétés i), et permet avec les trois dernières relations de déterminer si un nombre complexe est réel ou imaginaire pur.

– Concernant le module, on a déjà vu que $|z|^2 = z\bar{z}$ (I.6), on a aussi :

v. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ et $|z| = |\bar{z}|$.

vi. $|z.z'| = |z|.|z'|$.

vii. $|z+z'| \leq |z|+|z'|$, (inégalité triangulaire).

viii. $||z|-|z'|| \leq |z-z'|$.

Le module est donc compatible avec le produit et le quotient (propriété vi). Par contre, on a seulement une inégalité pour la somme, l'inégalité triangulaire vii.

Démonstration. – La propriété v s'obtient par des calculs directs.

– Pour vi on peut par exemple utiliser (I.6) et la propriété i.

– La démonstration de l'inégalité triangulaire n'est pas directe :
On a avec (I.6) : $|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = |z|^2+|z'|^2+z\bar{z}'+\bar{z}z'$.
Or par i $\bar{z}z' = \overline{z\bar{z}'}$. Donc par ii,

$$z\bar{z}'+\bar{z}z' = z\bar{z}'+\overline{z\bar{z}'} = 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq 2|z\bar{z}'| = 2|z||z'|.$$

Ainsi, on obtient avec la première égalité

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2+|z'|^2+2|z||z'| = (|z|+|z'|)^2$$

ce qui donne l'inégalité triangulaire puisque deux nombres positifs sont dans le même ordre que leurs carrés (car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$).

– La dernière inégalité viii se déduit de la précédente, en écrivant $z = (z-z')+z'$.

□

I.3.c. Inverse et quotient

Inverse d'un nombre complexe non nul

Proposition I.3.2. *Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$. De plus, $z' = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$.*

Remarque I.3.3. L'expression $\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ dans la proposition désigne le produit du nombre réel $\frac{1}{|z|^2}$ (bien défini, car $|z|$ est un réel non nul) par le nombre complexe $\bar{z}$.

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul, et z' tel que $zz' = 1$. En multipliant par $\bar{z}$ et en utilisant la formule (I.6) $z\overline{z} = |z|^2$, on obtient $|z|^2 z' = \bar{z}$. On multiplie ensuite par le nombre réel $\frac{1}{|z|^2}$, ce qui donne

$$z' = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}. \tag{I.7}$$

Si z' est un inverse de z, il est donc obligatoirement donné par la formule (I.7) ce qui donne l'unicité.

Réciproquement, en utilisant encore la formule (I.6), on a bien $z\,\frac{1}{|z|^2}\overline{z} = 1$. □

Définition I.3.4. Pour tout nombre complexe z non nul, l'unique z' tel que $zz' = 1$ est appelé inverse de z et noté $\dfrac{1}{z}$.

Corollaire I.3.5. *Si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.*

Démonstration. Supposons $zz' = 0$ et $z \neq 0$. En multipliant l'équation $zz' = 0$ par $1/z$ on obtient $z' = 0$. □

Quotient

- Si $z, z' \in \mathbb{C}$ et si $z' \neq 0$, le quotient de z par z' noté $\dfrac{z}{z'}$ est défini par $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.
- Méthode pour trouver la forme cartésienne d'un quotient :
  si $z = x + iy$, $z' = x' + iy' \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{z\overline{z}'}{z'\overline{z}'} = \frac{(x+iy)(x'-iy')}{(x'+iy')(x'-iy')}\\ &= \frac{xx'+yy'+i(x'y-xy')}{(x')^2+(y')^2}\\ &= \frac{xx'+yy'}{(x')^2+(y')^2} + i\frac{x'y-xy'}{(x')^2+(y')^2}.\end{aligned}$$

- Compatibilité avec la conjugaison et le module Si $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$. (ceci découle des formules $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ et $|ab| = |a||b|$ appliquées à $a = z'$, $b = \frac{z}{z'}$).

Exercices

Exercice I.3.6. Calculer $\dfrac{z}{z'}$ dans chacun des cas suivants :

i. $z = 1 - i,\ z' = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$

ii. $z = 1 - i,\ z' = 1 + i\sqrt{3}.$

iii. $z = -\sqrt{3} - i,\ z' = i.$

iv. $z = 3 + 2i,\ z' = 3 - 2i.$

Solution du premier cas :

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{(1-i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}+i(-\sqrt{2}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice I.3.7.

a. Soit M un point du plan d'affixe $z \neq 0$. Construire le point M' d'affixe $1/z$.

b. Comment faut-il choisir z pour que $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$ soit réel ?

c. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z+1)(\bar{z}-i)$ soit un imaginaire pur.

I.4. Forme polaire d'un nombre complexe

I.4.a. Rappels

Pour repérer un point M dans le plan, on peut utiliser les coordonnées cartésiennes (x, y), mais aussi les coordonnées polaires (r, θ) où r est la longueur du segment OM et θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.

Les relations entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires sont :

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta.$$

Tout nombre complexe $z = x+i\,y$ peut donc s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, avec r un nombre réel positif.

I.4.b. Définition

- Cette écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r \geq 0$ est appelée la *forme polaire* de z.
- $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est exactement le module de z.
- θ , noté $\arg(z)$, est un *argument* de z. Remarquons que θ est défini modulo 2π.

Notation I.4.1. On note $a \equiv b \mod 2\pi$ (ou $a = b \mod 2\pi$) quand

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi.$$

I.4.c. Propriétés

- *Égalité :* deux nombres complexes non nuls, exprimés sous forme polaire, sont égaux si et seulement s'ils ont même module et si leurs arguments diffèrent de $2k\pi$, où k est un nombre entier.
- *Produit :* si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ sont deux nombres complexes non nuls, exprimés sous forme polaire, le calcul de leur produit donne

$$\begin{aligned} z_1z_2 = r_1r_2\Big[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\,(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)\Big] \\ = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)), \end{aligned}$$

par des formules trigonométriques classiques. On en déduit les relations :

$$|\, z_1 z_2 \,| = |\, z_1 \,| \; |\, z_2 \,| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \mod 2\pi. \tag{I.8}$$

Si $z \neq 0$ $\left| \dfrac{1}{z} \right| = \dfrac{1}{|\, z \,|}$ et $\arg(\dfrac{1}{z}) = -\arg(z) \mod 2\pi$ (d'après l'égalité $z\,\dfrac{1}{z} = 1$).

- Conjugaison : si $z \neq 0$, $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \mod 2\pi$.
  Ceci découle immédiatement des formules $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.
- Méthode pour trouver la forme polaire d'un nombre complexe $z = x + yi \neq 0$: si θ est un argument de z, on a : $z = |z|\dfrac{z}{|z|} = |z|\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ ainsi :

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice I.4.2. Écrire sous forme polaire : $1 - i,\ -1 + i,\ i,\ 1 + i\sqrt{3},\ -\sqrt{3} - i$.

I.4.d. Écriture exponentielle de la forme polaire

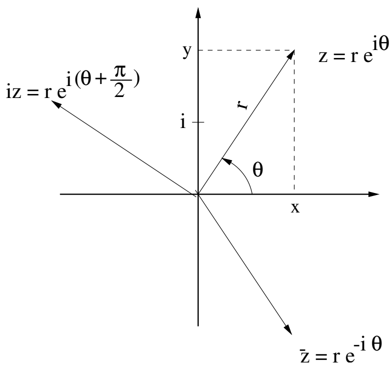


FIGURE I.2.: Le plan complexe : coordonnées polaires

Par convention, on note tout nombre complexe de module 1 sous la forme

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Cette exponentielle complexe vérifie les mêmes règles de calcul que l'exponentielle réelle. Par (I.8), on a :

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}. \tag{I.9}$$

Pour représenter un nombre complexe sous forme polaire, on utilisera désormais l'écriture exponentielle :

$$z = r\, e^{i\,\theta}.$$

(c.f. figure I.2 p. 11). Avec cette écriture, les différentes propriétés que nous avons rencontrées s'écrivent (r, r_1, r_2 sont des nombres réels strictement positifs, θ, θ_1, θ_2 des nombres réels) :

- égalité : $r_1\, e^{i\,\theta_1} = r_2\, e^{i\,\theta_2} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \pmod{2\pi} \end{array} \right.$
- conjugaison : $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- module : $|re^{i\theta}| = r$
- produit : $(r_1\, e^{i\theta_1})\,(r_2\, e^{i\theta_2}) = r_1\, r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- quotient : pour $r_2 \neq 0$, $\dfrac{r_1\, e^{i\theta_1}}{r_2\, e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Exercice I.4.3. Écrire sous forme cartésienne : $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $3e^{-2i\frac{\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $3e^{i\pi}$, $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

I.4.e. Formule de Moivre

On établit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, soit :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

C'est ce qu'on appelle la formule de De Moivre.

Application de la formule de Moivre

Calcul de $\cos n\,\theta$ et $\sin n\,\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

C'est l'opération inverse de la linéarisation, décrite plus bas.

Pour la réaliser, on utilise le fait que $\cos n\,\theta$ est la partie réelle (et $\sin n\,\theta$ la partie imaginaire) de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$, que l'on développe à l'aide de la formule du binôme.

Exemple pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i\sin 3\theta =& (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ =& \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ =& \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta). \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} \cos 3\theta =& \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta =& 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta. \end{aligned}$$

Si on le souhaite, on peut améliorer ces égalités en utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, ce qui donne alors

$$\begin{aligned} \cos 3\theta =& 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta =& 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. \end{aligned}$$

Exercice I.4.4. Écrire $\cos 4\theta$, $\sin 4\theta$ et $\cos 3\theta\sin 2\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

I.4.f. Formule d'Euler

Si $\theta \in \mathbb{R}$ on a la formule d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. On a $\cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta}$ et $\sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta}$; on obtient les dites formules en utilisant la relation ii p. 8. □

Linéarisation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$

Linéariser $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$, c'est en donner une expression qui ne contient aucun produit de fonctions circulaires. Cette opération est possible, en développant $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme (proposition I.7.4 p. 19).

Exemple I.4.5.

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta = &\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3}{2^3}\\
=&\frac{1}{2^3}\left[e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right]\\
=&\frac{1}{2^3}\left[e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right]\\
=&\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta = &\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{2^3 i^3}\\
=&\frac{-1}{2^3 i}\left[e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}-3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right]\\
=&\frac{-1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta
\end{aligned}$$

Exercice I.4.6. Linéariser $\cos^4\theta$, $\sin^4\theta$ et $\cos^3\theta\sin^2\theta$.

I.5. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

I.5.a. Cas général

Définition I.5.1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe z_0 tout nombre complexe ω tel que $\omega^n = z_0$.

Par exemple $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ est une racine carrée de i, i est une racine carrée de -1 et donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ est une racine quatrième de -1.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z_0 sont les nombres complexes ω solutions de l'équation en z :

$$z^n - z_0 = 0.$$

Le nombre 0 est la seule racine $n^{\text{ième}}$ de 0 car : $z^n = 0 \Leftrightarrow |z^n| = 0 \Leftrightarrow |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Proposition I.5.2. *Tout nombre complexe z_0 non nul possède exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes. De plus si $\rho_0 e^{i\theta_0}$ est la forme polaire de z_0, elles sont de la forme*

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho_0}\, e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n}2\pi)}, \qquad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

Démonstration. On cherche tous les nombres complexes $\omega = r\, e^{it}$ qui vérifient l'équation $\omega^n = \rho_0\, e^{i\,\theta_0}$. D'après la propriété d'égalité de deux nombres complexes, sous forme polaire, on a :

$$\begin{aligned} r^n e^{n\,i\,t} = \rho_0\, e^{i\theta_0} &\iff r^n = \rho_0 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ nt = \theta_0 + 2k\pi \\ &\iff r = \sqrt[n]{\rho_0} \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ t = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe $\omega_k = \sqrt[n]{\rho_0} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n}2\pi)}$ est racine et toutes les racines sont de cette forme.

Montrons qu'il n'y a, en fait, que n racines distinctes : posons $t_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n}2\pi$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Chaque re^{it_k} est racine, et ils sont deux à deux distincts : en effet, supposons que $re^{it_k} = re^{it_\ell}$, $k \neq \ell$, alors $(t_k - t_\ell) = 2\,p\,\pi$, soit $k - \ell = p\,n$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$. Mais comme $0 \leq k, \ell \leq n-1$, on a $|k - \ell| \leq n-1$, donc $|p|n \leq n-1$, ce qui force $p = 0$.

Il reste à montrer que toutes racines $n^{\text{ième}}$ de z_0 est de la forme ω_j, avec $0 \leq j \leq n-1$. Soit ω_k une telle racine, d'argument $t_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n}2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors avec la division euclidienne de k par n, il existe $0 \leq k' \leq n-1$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $k = n\,p + k'$, et l'argument t_k s'écrit donc $\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n}2\pi + p2\pi$. Ainsi

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho_0} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n}2\pi + p2\pi)} = \sqrt[n]{\rho_0} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n}2\pi)} = \omega_{k'},$$

ce qui achève la preuve. □

Exemple I.5.3 (Calcul des racines carrées de $1-i$). $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Si $z = re^{i\theta}$ est solution de $z^2 = 1 - i$ alors $z^2 = r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. D'après ce qui précède, on a deux solutions :

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}} \text{ et } z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$$

I.5.b. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

On s'intéresse ici au cas où $z_0 = 1$ c'est à dire aux solutions complexes de l'équation en z

$$z^n - 1 = 0.$$

La précédente proposition nous donne :

Proposition I.5.4. *Le nombre 1 possède exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes :*

$$\omega_k = e^{i\frac{k}{n}2\pi} \qquad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

Propriété

Si ω_k est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité autre que 1 (soit k non multiple de n), alors

$$1 + \omega_k + \omega_k^2 + \cdots + \omega_k^{n-1} = 0.$$

Pour la preuve, il suffit d'utiliser la formule de la somme d'une suite géométrique (I.19) rappelée dans l'appendice p. 20. Puisque $\omega_k \neq 1$ et $\omega_k^n = 1$, on a :

$$1 + \omega_k + \omega_k^2 + \cdots + \omega_k^{n-1} = \frac{1 - \omega_k^n}{1 - \omega_k} = 0.$$

Lorsque $k = 1$ on obtient la formule :

$$1 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n-1} = 0.$$

Cas particulier : racines cubiques de l'unité

D'après I.5.2 , les racines cubiques de l'unité sont 1 , $e^{2i\pi/3}$, $e^{4i\pi/3}$. Par convention, on pose

$$j = e^{2i\pi/3}.$$

On en déduit : $j^2 = \overline{j} = e^{4i\pi/3}$. On retiendra que les racines cubiques de l'unité sont : 1 , j et j^2 et qu'elles vérifient la relation

$$1 + j + j^2 = 0.$$

Exercices

Exercice I.5.5. Soit z un nombre complexe non nul et d une racine $n^{\text{ième}}$ de z.
Montrer qu'il suffit de multiplier d par les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité pour obtenir les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z.

Exercice I.5.6. Déterminer les racines cubiques de -8.

I.5.c. Racines carrées d'un nombre complexe, sous forme cartésienne

Étant donné un nombre complexe $z_0 = x_0 + iy_0$, on cherche les nombres complexes $z = x + iy$ tels que $z^2 = z_0$.

Comme $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, on obtient les équations

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x_0 \\ 2xy = y_0. \end{cases}$$

Remarquons par ailleurs que si $z^2 = z_0$ alors $|z|^2 = |z_0|$ c'est à dire que $x^2 + y^2 = |z_0|$.

On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 & - & y^2 & = & x_0 \\ x^2 & + & y^2 & = & |z_0| \\ & & 2xy & = & y_0. \end{cases}$$

d'où $x^2 = \dfrac{x_0 + |z_0|}{2} = \dfrac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}$ et $y^2 = \dfrac{|z_0| - x_0}{2} = \dfrac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}$.

Comme on a toujours $|\operatorname{Re} z_0| \leq |z_0|$, $\dfrac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2} \geq 0$ et $\dfrac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2} \geq 0$, on peut donc calculer leur racine carrée dans $\mathbb{R}$. On trouve

$$\begin{cases} x & = & \pm\sqrt{\frac{|z_0|+\operatorname{Re} z_0}{2}} \\ y & = & \pm\sqrt{\frac{|z_0|-\operatorname{Re} z_0}{2}}. \end{cases}$$

La condition $2xy = y_0 = \operatorname{Im} z_0$ permet de déterminer les signes $\pm$. Ainsi, si $\operatorname{Im} z_0 \geq 0$ alors $xy \geq 0$ donc x et y sont de même signe. Les solutions sont

$$z = x+iy = \sqrt{\frac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}} + i\sqrt{\frac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}} \quad \text{et} \quad z = -\sqrt{\frac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}} - i\sqrt{\frac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}}.$$

Par contre, si $\operatorname{Im} z_0 \leq 0$ alors $xy \leq 0$ donc x et y sont de signe opposé. Les solutions sont

$$z = x+iy = \sqrt{\frac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}} - i\sqrt{\frac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}} \quad \text{et} \quad z = -\sqrt{\frac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}} + i\sqrt{\frac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}}.$$

Ces formules ne sont évidemment pas à savoir, par contre la méthode est à connaître.

Exemple I.5.7 (retour au calcul des racines carrées de $1 - i$). Si $z = x + iy$ est solution de $z^2 = z_0$ alors $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = 1 - i$.

On en déduit : $x^2 - y^2 = 1$ et $xy = -\dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs, $|z|^2 = |1 - i|$ donne $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$.

On trouve $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ soit $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$ et $y^2 = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$ soit $y = \pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}$.

Enfin, comme $2xy = -1$, x et y sont de signe opposé.

Ainsi, les solutions sont

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}}.$$

(comparer avec le résultat de l'exemple I.5.3).

I.6. Équation du second degré à coefficients complexes

Proposition I.6.1. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes (qui peuvent être identiques).*

On procède comme dans le cas réel :

$$az^2 + bz + c = a\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left[\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \tag{I.10}$$

donc $az^2 + bz + c = 0$ est équivalent à

$$(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0,$$

où Δ est le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue deux cas :

- Si $\Delta \neq 0$, alors $\Delta = b^2 - 4ac$ admet deux racines carrées complexes distinctes, notées δ et $-\delta$. Alors les solutions sont

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \text{ et } z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \tag{I.11}$$

  et elles sont distinctes.
- Si $\Delta = 0$, alors

$$-\frac{b}{2a} \tag{I.12}$$

  est racine double (l'expression *racine double* est définie rigoureusement dans le prochain chapitre sur les polynômes).

Les formules (I.11)**,** (I.12) **sont à retenir**.

Remarque I.6.2. Dans le cas particulier des coefficients réels, $\Delta \in \mathbb{R}$. Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes, si $\Delta < 0$, $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et il y a deux racines complexes conjuguées.

Exemple I.6.3. Résoudre l'équation $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$.

Calcul du discriminant : $\Delta = (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 7 - 24i$. On cherche un complexe $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On utilise la méthode vue en I.5.c.

$(x+iy)^2 = 7 - 24i \iff (\ x^2 - y^2 = 7 \quad \text{et} \quad 2xy = -24\ )$

En rajoutant l'égalité des modules : $x^2 + y^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$,

on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \\ xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 3 \\ xy = -12. \end{cases}$$

Par conséquent, Δ admet deux racines carrées : $\delta = 4 - 3i$ et $-\delta = -4 + 3i$.

Les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2+i+4-3i}{2} = 3 - i \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2+i-4+3i}{2} = -1 + 2i.$$

I.7. Appendice : quelques rappels

I.7.a. Principe du raisonnement par récurrence

Supposons que l'on veuille prouver qu'une propriété P_n, dépendant d'un entier n, est vraie pour tout $n \geq n_0$.

On procède en 2 étapes :

– *Initialisation.* On montre que la propriété P_{n_0} est vraie.
– *Hérédité.* On montre : *si* P_n est vraie pour un entier n, *alors* P_{n+1} est vraie.

Cette méthode est la méthode de récurrence simple, mais parfois, elle est insuffisante et il faut utiliser une récurrence généralisée, dans laquelle la seconde étape est remplacée par :

– *Hérédité.* Pour tout $n \geq n_0$, *si* la propriété P_k est vraie pour tous les entiers k compris entre n_0 et n , *alors* P_{n+1} est vraie.

Exercice I.7.1. Démontrer par récurrence (simple) sur n les propriétés suivantes :

$$\forall n \geq 0, \quad 2^n \geq n; \qquad \forall n \geq 4, \quad n! \geq 2^n$$

où $n!$ (lire *factorielle* n) est défini par

$$0! = 1, \quad \forall n \geq 0,\ (n+1)! = (n+1)n!$$

i.e. $n! = 1.2 \ldots n$.

I.7.b. Formule du binôme

On rappelle que les coefficients du binômes $\binom{n}{k}$ sont définis par $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ et si $k > n$, et la relation :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad 0 \leq k \leq n. \tag{I.13}$$

Remarque I.7.2. On note parfois C_n^k au lieu de $\binom{n}{k}$.

On calcule les coefficients du binôme à l'aide du triangle de Pascal : on met des 1 sur le bord du triangle, et chaque élément est la somme des deux éléments situés au-dessus de lui. Ainsi

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

le coefficient $\binom{n}{k}$ est le k-ième élément de la n-ième ligne (les lignes sont comptées à partir de 0, de même que les éléments de chaque ligne, par exemple $\binom{6}{2} = 15$).

Si n et k sont des entiers tels que $0 \leq k \leq n$, les coefficients du binôme peuvent aussi être définis par la formule suivante

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{I.14}$$

Exercice I.7.3. Démontrer (I.14) par récurrence généralisée sur $n + k$. On utilisera en particulier la formule (I.13).

On a alors la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{C}$:

Proposition I.7.4. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}.$$

La preuve se fait par récurrence sur n, comme dans le cas où z et z' sont réels. Elle est laissée au lecteur.

I.7.c. Suites arithmétiques et géométriques

Une suite *arithmétique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + a, \quad n \in \mathbb{N} \tag{I.15}$$

où a est un nombre (réel ou plus généralement complexe) fixé, appelé *raison* de la suite (u_n). Par une récurrence élémentaire (à faire !), on peut montrer

$$u_n = u_0 + n\, a, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La somme des termes d'une telle suite est donnée par la formule :

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = (q - p + 1)\frac{u_p + u_q}{2}, \quad 0 \leq p \leq q. \tag{I.16}$$

On peut retenir que la somme des termes d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes $q-p+1$ multiplié par la moyenne $\frac{u_p+u_q}{2}$ du premier terme et du dernier terme.

Exercice I.7.5. Démontrer par récurrence (sur $q \geq p$, p étant fixé) la formule (I.16).

Exemple I.7.6.

$$3 + 5 + 7 + \ldots + 17 = \sum_{k=1}^{8} (2k + 1) = 8 \times \frac{3 + 17}{2} = 80.$$

Exercice I.7.7. Calculer $\sum_{j=20}^{30}(3j+5)$.

Une suite *géométrique* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par une relation de récurrence de la forme :

$$v_{n+1} = bv_n, \tag{I.17}$$

où le nombre complexe non nul b est encore appelé *raison* de la suite (v_n). On démontre, à nouveau par récurrence :

$$v_n = b^n v_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si $b = 1$, la suite est constante. Lorsque $b \neq 1$, la somme de ses termes est donnée par la formule

$$\sum_{n=p}^{q} v_n = \frac{1-b^{q-p+1}}{1-b} \times v_0 b^p, \quad 0 \leq p \leq q, \tag{I.18}$$

qui se déduit immédiatement de la formule

$$\sum_{n=0}^{N} b^n = \frac{1-b^{N+1}}{1-b}. \tag{I.19}$$

Pour démontrer (I.19) remarquer que cette formule est équivalente à

$$(1-b)\sum_{n=0}^{N} b^n = 1-b^{N+1}.$$

Or

$$(1-b)\sum_{n=0}^{N} b^n = \sum_{n=0}^{N} b^n - \sum_{n=1}^{N+1} b^n = 1-b^{N+1}.$$

Exercice I.7.8. On considère un échiquier de 64 cases. On pose 1 grain de blé sur la première case, 2 grains sur la deuxième, 4 sur la troisième et ainsi de suite, en doublant le nombre de grains de blé à chaque nouvelle case. Combien y aura-t-il de grains de blé sur l'échiquier une fois les 64 cases remplies ?

Les formules (I.16) **et** (I.19) **sont à retenir.**

II. Les polynômes

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés “nombres” ou “scalaires”.

II.1. Définitions

II.1.a. Polynômes comme suites finies

Un polynôme P sur $\mathbb{K}$ (ou à coefficients dans $\mathbb{K}$) est la donnée d'une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle qu'il existe un entier $p \geq 0$ avec

$$\forall k > p, \quad a_k = 0.$$

Les nombres a_k sont appelés les *coefficients* de P. Le plus grand nombre d tel que $a_d \neq 0$ est appelé *degré* de P et noté $\deg P$ ou $\deg(P)$. Le coefficient a_d correspondant à ce degré est appelé *coefficient dominant* de P. Le polynôme $(a_k)_{k\geq 0}$ tel que $a_k = 0$ pour tout k est appelé le *polynôme nul* et noté 0. Par convention $\deg 0 = -\infty$.

Exemple II.1.1. La suite $(1, 2, 0, 0, 0, \ldots)$ est un polynôme de degré 1 ($a_0 = 1$, $a_1 = 2$, les $\ldots$ signifient ici que $a_k = 0$ si $k \geq 2$).

La suite $(2^k)_{k\geq 0}$ n'est pas un polynôme.

II.1.b. Addition

Soit $P = (a_k)_{k\geq 0}$ et $Q = (b_k)_{k\geq 0}$ deux polynômes. La *somme* $P+Q$ de P et Q est par définition la suite $(a_k + b_k)_{k\geq 0}$. C'est aussi un polynôme. Ceci définit une addition sur l'ensemble des polynômes, qui est commutative et associative :

$$P + Q = Q + P, \quad (P + Q) + R = P + (Q + R).$$

Du fait de l'associativité, on peut noter sans ambiguïté $P + Q + R$ la somme de trois polynômes.

Proposition II.1.2. *Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

De plus, si $\deg P \neq \deg Q$*,*

$$\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q).$$

Démonstration. On note $P = (a_k)_{k\geq 0}$, $Q = (b_k)_{k\geq 0}$, $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. Par définition du degré,

$$a_p \neq 0, \quad b_q \neq 0, \quad k > p \Longrightarrow a_k = 0, \quad k > q \Longrightarrow b_k = 0.$$

Par définition, $P + Q = (a_k + b_k)_{k\geq 0}$. De plus

$$k > \max(p, q) \Longrightarrow a_k = b_k = 0 \Longrightarrow a_k + b_k = 0.$$

Donc $P + Q$ est bien un polynôme, de degré inférieur ou égal à $\max(p, q)$.
Supposons $p \neq q$, par exemple $p < q$. Alors $a_q = 0$, $b_q \neq 0$ et donc

$$a_q + b_q \neq 0,$$

ce qui montre $\deg(P + Q) \geq q = \max(p, q)$ et finalement

$$\deg(P + Q) = \max(p, q).$$

La preuve est identique lorsque $p > q$. □

Notation II.1.3. Si $P = (a_k)_{k\geq 0}$ est un polynôme, on note $-P$ le polynôme $(-a_k)_{k\geq 0}$. C'est l'unique polynôme A tel que $P + A = 0$. Si P et Q sont deux polynômes, on note $P - Q$ le polynôme $P + (-Q)$.

II.1.c. Indéterminée

On s'empresse d'adopter une notation plus commode que la notation $(a_k)_{k\geq 0}$ pour désigner les polynômes. On fixe une lettre, généralement X, appelée *indéterminée*. Soit $P = (a_k)_{k\geq 0}$ un polynôme de degré d. On note ce polynôme :

$$P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j. \tag{II.1}$$

Exemple II.1.4. Le polynôme $(1, 2, 0, 0, 0, \ldots)$ est noté $2X + 1$. Le polynôme

$$(0, 0, 0, 9, 4, 0, 3, 0, 0, 0, \ldots)$$

est noté $3X^6 + 0X^5 + 4X^4 + 9X^3 + 0X^2 + 0X + 0$ ou plus simplement $3X^6 + 4X^4 + 9X^3$.

Dans (II.1), les puissances sont rangées dans l'ordre décroissant. On peut aussi les ranger dans l'ordre croissant. De fait, par la définition et la commutativité de l'addition des polynômes, on a :

$$a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{d-1} X^{d-1} + a_d X^d.$$

Notation II.1.5. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et d'indéterminée X est noté $\mathbb{K}[X]$. Un polynôme P est parfois noté $P(X)$ lorsqu'on veut insister sur le fait que la lettre X désigne l'indéterminée.

II.1.d. Multiplication

Soit $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ et $Q = \sum_{j=0}^{d'} b_j X^j$ deux polynômes, $d = \deg P$, $d' = \deg Q$. Par définition, le produit PQ de P et Q est le polynôme

$$PQ = \sum_{j=0}^{d+d'} \left(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \right) X^j. \tag{II.2}$$

Il s'obtient en développant l'expression $\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \sum_{\ell=0}^{d'} b_\ell X^\ell$ et en utilisant les règles de calcul usuelles sur l'addition et la multiplication, et la règle : $X^k X^\ell = X^{k+\ell}$.

Remarque II.1.6. Dans l'expression (II.2), $\sum_{k+\ell=j}$ signifie que la somme porte sur tous les indices (entiers naturels) k et ℓ tels que $k+\ell = j$. Par exemple :

$$\sum_{k+\ell=2} a_k b_\ell = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

Il est très important de maîtriser ce genre de notation.

La formule

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \tag{II.3}$$

découle immédiatement de la définition de la multiplication des polynômes. Le coefficient dominant de PQ est $a_d b_{d'}$. On déduit immédiatement de (II.3) :

$$PQ = 0 \Longrightarrow (P = 0 \text{ ou } Q = 0).$$

La multiplication des polynômes vérifie aussi les règles de calcul usuelles :

Proposition II.1.7. *La multiplication des polynômes est commutative, associative, et distributive par rapport à l'addition : si $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,*

$$PQ = QP, \quad (PQ)R = P(QR) \text{ et } P(Q+R) = PQ + PR$$

Démonstration. On ne démontre que l'associativité, la preuve des autres propriétés est laissée au lecteur. Soit $P = \sum_{k=0}^{d_1} a_k X^k$, $Q = \sum_{\ell=0}^{d_2} b_\ell X^\ell$ et $R = \sum_{m=0}^{d_3} c_m X^m$ trois polynômes. On doit vérifier

$$(PQ)R = P(QR). \tag{II.4}$$

En utilisant la définition de la multiplication, on obtient $PQ = \sum_{j=0}^{d_1+d_2} \left(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \right) X^j$, puis

$$(PQ)R = \sum_{r=0}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{j+m=r} \left(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \right) c_m X^r \underset{\star}{=} \sum_{r=0}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{k+\ell+m=r} a_k b_\ell c_m X^r.$$

De même, $QR = \sum_{s=0}^{d_2+d_3} \sum_{\ell+m=s} b_\ell c_m X^s$ et donc

$$P(QR) = \sum_{r=0}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{k+s=r} a_k \left(\sum_{\ell+m=s} b_\ell c_m \right) X^r \underset{\bigstar}{=} \sum_{r=0}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{k+\ell+m=r} a_k b_\ell c_m X^r.$$

D'où $(PQ)R = P(QR)$. $\square$

Exercice II.1.8. Se convaincre des deux égalités $\bigstar$ ci-dessus. On pourra commencer par écrire explicitement ces égalités $d_1 = d_2 = d_3 = 1$.

En pratique, pour calculer le produit de deux polynômes, on n'utilise pas directement la formule (II.2)**, mais simplement les règles de calcul usuelles.** Par exemple :

$$\begin{aligned}(X^3 + 2X^2 - 1)(X^2 + 7) &= X^3X^2 + 7X^3 + 2X^2X^2 + 14X^2 - X^2 - 7 \\ &= X^5 + 7X^3 + 2X^4 + 13X^2 - 7.\end{aligned}$$

II.2. Premières propriétés

II.2.a. Division euclidienne

Théorème II.2.1. *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul. Il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R dans $\mathbb{K}[X]$ tels que :*

$$A = QB + R \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Définition II.2.2. Lorsque $R = 0$ dans le théorème ci-dessus, c'est à dire lorsqu'il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = QB$, on dit que B *divise* A, que A est *divisible* par B, ou que B est un *diviseur de* A.

Démonstration. Existence. Lorsque $A = 0$, on peut choisir $Q = 0$ et $R = 0$. Supposons A non nul, et notons $A = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, $B = b_pX^p + b_{p-1}X^{p-1} + \ldots + b_1X + b_0$, avec $n = \deg A$, $p = \deg B$. On commence par montrer :

Lemme II.2.3. *Soit $\widetilde{A} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg \widetilde{A} \geq \deg B$. Il exists $\widetilde{Q} \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$\deg(\widetilde{A} - B\widetilde{Q}) < \deg \widetilde{A}. \tag{II.5}$$

Preuve du lemme. Soit d le degré de $\widetilde{A}$. On note $\widetilde{A} = \sum_{k=0}^{d} \tilde{a}_k X^k$. On pose $\widetilde{Q} = \frac{\tilde{a}_d}{b_p} X^{d-p}$. Le polynôme $\widetilde{Q}\,B$ est de degré $d - p + p = d$, et son coefficient dominant (le coefficient de X^d) est $\frac{\tilde{a}_d}{b_p} \times b_p = \tilde{a}_d$. On en déduit comme annoncé que $\widetilde{A} - B\widetilde{Q}$ est au plus de degré $d - 1$. $\square$

Pour montrer l'existence de Q et R, on construit deux suites finies $(A_j)_{j=0\ldots J}$ et $(Q_j)_{j=1\ldots J}$ en posant $A_0 = A$ et en définissant les A_j, Q_j, $j \geq 1$ par récurrence de la manière suivante. Soit $j \geq 0$ tel que A_j est connu.

– ou bien $\deg(A_j) < \deg(B)$, on pose $J = j$ et on arrête la construction ;
– ou bien $\deg(A_j) \geq \deg(B)$. On pose alors $Q_{j+1} = \widetilde{Q}$, $A_{j+1} = A_j - BQ_{j+1}$, où $\widetilde{Q}$ est donné par le lemme avec $\widetilde{A} = A_j$.

Par (II.5), la suite $\deg(A_j)$ est strictement décroissante. Puisque c'est une suite d'éléments de $\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$, la construction précédente doit s'arrêter pour un certain J. On a $\deg(A_J) < \deg(B)$ et $A_j = A_{j+1} + BQ_{j+1}$ pour tout $j \leq J-1$. On en déduit :

$$A = A_0 = A_1 + BQ_1 = A_2 + BQ_2 + BQ_1 = \ldots = A_J + B(Q_1 + \ldots + Q_J).$$

On a bien obtenu une division euclidienne de A par B, de quotient $Q = Q_1 + \ldots + Q_J$ et de reste A_J.

Unicité.

Supposons que $A = Q\,B + R = S\,B + T$, où les degrés de R et T sont strictement inférieurs à celui de B. On en tire :

$$R - T = (S - Q)B \quad \text{et} \quad \deg(R - T) < \deg(B). \tag{II.6}$$

On montre $Q = S$ par l'absurde. Si $Q \neq S$, alors $\deg(S - Q) \geq 0$. Donc

$$\deg((S - Q)\,B) = \deg(S - Q) + \deg(B) \geq \deg(B),$$

ce qui contredit (II.6).

Donc $Q = S$, d'où $Q\,B + R = S\,B + T = Q\,B + T$, d'où $R = T$. □

En pratique, pour calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un polynôme par un autre, on calcule les suites A_j, Q_j de la démonstration précédente en posant la division euclidienne

Exemple II.2.4. Division de $X^3 + 2X^2 + X + 1$ par $X^2 + 1$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & + & 2X^2 & + & X & + & 1 & X^2+1 \\
\hline
- & X^3 & & & - & X & & & X+2 \\
\cline{1-8}
 & & & 2X^2 & & & + & 1 & \\
 & & - & 2X^2 & & & - & 2 & \\
\cline{1-8}
 & & & & & & - & 1 &
\end{array}$$

Le résultat s'écrit : $X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X + 2) - 1$.
Quotient : $X + 2$, reste : -1.
Dans cet exemple, on a $Q_1 = X$, $A_1 = 2X^2 + 1$, $Q_2 = 2$ et $A_2 = -1$.

Exercice II.2.5. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :
$A = X^4 - 2X^2 - X + 1$, $B = X^2 + X$;
$A = X^6 + 4X^4 - X^2 + 1$, $B = X^2 + 1$.

II.2.b. Fonctions polynomiales

Définition II.2.6. On appelle *fonction polynomiale* sur $\mathbb{K}$ toute fonction de la forme

$$\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

où les coefficients $(a_j)_{j=0\ldots n}$ sont dans $\mathbb{K}$. Le polynôme $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ est appelé *polynôme associé* à la fonction $\widetilde{P}$.

Remarque II.2.7. Il faut toujours avoir en mémoire la différence entre la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ (et sa variable x) et le polynôme P (et son indéterminée X) ; même si, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on omet d'écrire le symbole$\widetilde{\ }$.

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{K}$, on notera désormais $P(a)$ la valeur prise par la fonction $\widetilde{P}$ au point a.

Proposition II.2.8. *Le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X - \alpha$ est le polynôme constant égal à $P(\alpha)$.*

Démonstration. La division euclidienne de P par $X - \alpha$ s'écrit :

$$P = (X - \alpha)Q + R \text{ avec } \deg(R) < 1.$$

Puisque $\deg(R) < 1$, le polynôme R est une constante c et $P(\alpha) = c$. □

II.2.c. Polynôme dérivé

Définition II.2.9. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme sur $\mathbb{K}$. On appelle *polynôme dérivé* de P le polynôme :

$$P' = n a_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_{i+1}X^i.$$

On note P'', P''', $P^{(4)}$, ..., $P^{(k)}$ la suite des polynômes dérivés successifs. On pose enfin $P^{(0)} = P$.

Exemple II.2.10. Soit $P = 5 + iX^2 + 4X^3$. Alors $P' = 2iX + 12X^2$, $P'' = 2i + 24X$ etc...

Proposition II.2.11. *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors*

$$\deg P \geq 1 \Longrightarrow \deg(P') = \deg(P) - 1 \tag{II.7}$$

$$P' = 0 \iff P \textit{ est constant} \tag{II.8}$$

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q', \quad P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \tag{II.9}$$

$$(PQ)' = P'Q + PQ'. \tag{II.10}$$

Démonstration. La propriété (II.7) se déduit immédiatement de la définition du degré et du polynôme dérivé.

Preuve de (II.8). Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n. Alors

$$P' = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = 0 \iff \forall k \in \{1, \dots, n\},\ a_k = 0.$$

En particulier, si $n \geq 1$, $a_n = 0$, une contradiction. Donc $n = 0$ ou $n = -\infty$, ce qui signifie exactement que P est constant.

La preuve de (II.9) est directe et laissée au lecteur.

Preuve de (II.10). On commence par prouver (II.10) lorsque $P = X^n$, $n \geq 0$. On note

$$Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k, \quad p = \deg(Q).$$

Alors

$$P' = nX^{n-1}, \quad Q' = \sum_{k=0}^{p} k b_k X^{k-1}, \quad PQ = \sum_{k=0}^{p} b_k X^{k+n}.$$

et donc

$$P'Q + PQ' = \sum_{k=0}^{p} n b_k X^{k+n-1} + \sum_{k=0}^{p} k b_k X^{k+n-1} = \sum_{k=0}^{p} (k+n) b_k X^{k+n-1} = (PQ)'.$$

On démontre maintenant le cas général. On commence par remarquer que si $N \geq 1$, $P_1, \dots, P_N$ sont des polynômes et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ des scalaires, alors (II.9) et une récurrence élémentaire nous donnent :

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k\right)' = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k'. \tag{II.11}$$

Supposons P non nul (sinon le résultat est évident). On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg(P)$. Par (II.11),

$$\begin{aligned} (PQ)' &= \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k Q)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[(X^k)'Q + X^k Q'\right] = \sum_{k=0}^{n} a_k k X^{k-1} Q + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k Q' = P'Q + PQ', \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

II.3. Racines

II.3.a. Cas général

Définition II.3.1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une *racine* (ou un *zéro*) de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Théorème II.3.2. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Un élément α de $\mathbb{K}$ est racine de P si, et seulement si, P est divisible par $X - \alpha$.*

Démonstration. D'après la proposition II.2.8 $P = (X - \alpha)Q + P(\alpha)$. Par conséquent P est divisible par $X - \alpha$ si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$. □

Exercice II.3.3. Soit P le polynôme sur $\mathbb{R}$ défini par $P = X^3 - X^2 - 3X + 3$.

a. Déterminer une racine évidente de P.

b. En déduire une expression de P sous la forme d'un produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré 2.

c. En déduire l'ensemble des racines de P.

Définition II.3.4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une racine *d'ordre* r, ou *de multiplicité* r, de P si $P = (X - \alpha)^r Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

D'après le théorème II.3.2, une racine est toujours de multiplicité au moins 1.
Lorsque $r = 1$, on dit que la racine est simple.
Lorsque $r = 2$, on dit que la racine est double.

Exemple II.3.5. Le polynôme $P = 3(X-1)^2(X-i)(X+i)^3$ a pour racines $1, i$ et $-i$. 1 est une racine double, i est une racine simple, et $-i$ est une racine d'ordre 3.

Un trinôme complexe du second degré de discriminant non nul a deux racines simples. Un trinôme du second degré de discriminant nul a une racine double.

Définition II.3.6. On dit que le polynôme P a exactement n racines *comptées avec leur ordre de multiplicité* (ou *avec multiplicité*) lorsque la somme des multiplicités de ses racines est exactement n.

Exemple II.3.7. Le polynôme P de l'exemple II.3.5 a 3 racines distinctes, mais 6 racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Avertissement II.3.8. Il y a donc deux manières de compter le nombre de racines d'un polynôme. L'expression “le polynôme P a n racines” est ambigüe et ne doit jamais être utilisée sans précision supplémentaire.

Remarque II.3.9. Si P a r racines et Q a s racines (comptées avec leur ordre de multiplicité), alors PQ a $r+s$ racines (comptées avec leur ordre de multiplicité). Cette propriété n'est plus valable lorsque l'on compte les racines distinctes des polynômes.

Exemple II.3.10. Si l'on compte les racines avec multiplicité, le polynôme $P = (X-1)^2$ a deux racines, le polynômes $Q = (X-1)$ a 1 racines, et le polynôme $PQ = (X-1)^3$ a bien $2+1$ racines.

Mais P, Q et PQ ont chacun une seule racine distincte.

Théorème II.3.11. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La racine $\alpha \in \mathbb{K}$ de P est de multiplicité r si et seulement si, pour tout k entre 0 et $r-1$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.*

Démonstration. On commence par montrer

(II.12) α racine de multiplicité r de P

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ racine de multiplicité } r-1 \text{ de } P' \text{ si } r \geq 2 \\ P'(\alpha) \neq 0 \text{ si } r = 1. \end{cases}$$

En effet, si α est racine de multiplicité r de P, on a $P = (X-\alpha)^r Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. En dérivant, on obtient :

$$P' = r(X-\alpha)^{r-1}Q + (X-\alpha)^r Q' = (X-\alpha)^{r-1}\left(rQ + (X-\alpha)Q'\right),$$

de la forme $(X-\alpha)^{r-1}Q_1$ avec $Q_1(\alpha) = rQ(\alpha) \neq 0$. Ce qui donne l'implication (II.12)

En itérant (II.12), on obtient que si α est une racine d'ordre $r \geq 1$ de P, c'est une racine d'ordre $r-k$ de $P^{(k)}$ pour tout $k = 1 \ldots r-1$. En particulier c'est une racine d'ordre 1 de $P^{(r-1)}$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Réciproquement, supposons $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Soit s la multiplicité de α. D'après ce qui précède

$$P(\alpha) = \ldots = P^{(s-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(s)}(\alpha) \neq 0 \tag{II.13}$$

On montre $s = r$ par l'absurde :
- si $s > r$ alors, on aurait $P^{(r)}(\alpha) = 0$ par (II.13), ce qui est contraire aux hypothèses.
- si $s < r$ alors, on aurait $P^{(s)}(\alpha) = 0$, contredisant (II.13).

Donc $s = r$ et α est de multiplicité r. □

II.3.b. Polynômes à coefficients complexes

Théorème II.3.12 (Théorème de D'Alembert)**.** *(admis) Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine.*

Corollaire II.3.13. *Tout polynôme P, de degré $n \geq 1$, de $\mathbb{C}[X]$ admet exactement n racines complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité).*

Démonstration. Par récurrence sur n. Dans toute la démonstration, les racines sont comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Initialisation : si $n = 1$, le résultat est immédiat.
- Hérédité : supposons que tout polynôme de degré $n-1$ de $\mathbb{C}[X]$ admette exactement $n-1$ racines complexes.
  Si P est un polynôme de degré n, d'après le théorème de D'Alembert, il admet au moins une racine α.
  Il existe donc Q, de degré n-1, tel que $P = (X-\alpha)Q$. D'après l'hypothèse de récurrence, Q admet n-1 racines α_1 , ..., α_{n-1}. Par conséquent, P admet les n racines α , α_1 , ..., α_{n-1}.

□

II.3.c. Polynômes à coefficients réels

Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, un polynôme à coefficients réels peut être considéré comme un polynôme à coefficients complexes. On déduit donc du corollaire II.3.13 :

Corollaire II.3.14. *Tout polynôme P, de degré $n \geq 1$, de $\mathbb{R}[X]$ admet au plus n racines réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité).*

De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$. D'où :

Proposition II.3.15. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ l'est aussi. De plus, α et $\overline{\alpha}$ ont même ordre de multiplicité.*

Démonstration. Soit r l'ordre de multiplicité de α. On a donc $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout k entre 0 et $r-1$, et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Donc, $P^{(k)}(\overline{\alpha}) = \overline{P^{(k)}(\alpha)} = \overline{0} = 0$ pour tout $k \leq r-1$ et $P^{(r)}(\overline{\alpha}) = \overline{P^{(r)}(\alpha)} \neq 0$. □

Corollaire II.3.16. *Tout polynôme P, de degré impair de $\mathbb{R}[X]$ admet au moins une racine réelle.*

Démonstration. En effet, un nombre complexe α est réel si et seulement si $\alpha = \overline{\alpha}$. Il découle donc de la proposition II.3.15 que les racines complexes non réelles de P peuvent se ranger par paires de même multiplicité. Il y a donc un nombre pair de racines complexes non réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité). Puisque, par le corollaire II.3.13, P a exactement $\deg(P)$ racines complexes, le nombre de racines réelles de P est impair, et donc non nul. □

Exercice II.3.17. Donner une autre démonstration du corollaire II.3.16, en étudiant la fonction polynôme associée à P et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

On terminer par montrer (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que la donné de la fonction polynôme détermine exactement le polynôme associé :

Proposition II.3.18. *Soient f et g deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}$, définies par $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ et $g(x) = b_p x^p + \cdots + b_1 x + b_0$, avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$. Si*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = g(x),$$

alors $p = n$ et $a_i = b_i$ pour tout i.

Démonstration. S'il existait i tel que $a_i \neq b_i$, la fonction polynomiale $f - g$ serait de degré $k \geq i$. Elle aurait au plus k racines et ne serait donc pas nulle. Ce qui est contraire à l'hypothèse. □

Exercice II.3.19.

a. Montrer que i est racine double du polynôme $P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$.

b. Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $P = X^5 + aX^4 + bX^3 - bX^2 - aX - 1$ admette 1 comme racine de plus grande multiplicité possible.

II.4. Polynômes irréductibles

II.4.a. Cas général

Définition II.4.1. Un polynôme P non constant qui vérifie la condition :

si P est produit de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, l'un des deux est constant

est dit *irréductible* dans $\mathbb{K}[X]$.

Par convention, les polynômes constants ne sont pas irréductibles.

Exemple II.4.2. Un polynôme de degré 1 est irréductible (raisonner sur les degrés).

Théorème II.4.3. *Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme P non constant se décompose en produit de polynômes irréductibles*

Démonstration. Par récurrence sur le degré n de P :

Initialisation. Si $n = 1$ alors le polynôme est irréductible.

Hérédité. Supposons que tout polynôme de degré $< n$ soit produit de polynômes irréductibles.
Soit P un polynôme de degré n.

- Si P est irréductible, le résultat est obtenu.
- Si P n'est pas irréductible, $P = P_1P_2$ avec $\deg(P_1) \geq 1$ et $\deg(P_2) \geq 1$.
  $\deg(P_1) + \deg(P_2) = \deg(P) = n$ donc $\deg(P_1) < n$ et $\deg(P_2) < n$. Par hypothèse de récurrence P_1 et P_2 sont tous les deux produits de polynômes irréductibles donc P est aussi produit de polynômes irréductibles.

□

Remarque II.4.4. On peut montrer l'unicité de la décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles à l'ordre des facteurs et aux multiplications par des constantes près. On parlera donc souvent de ***la*** décomposition en facteurs irréductibles.

Remarque II.4.5. Le théorème II.4.3 est l'analogue, pour les polynômes, de la décomposition en facteurs premiers des entiers.

II.4.b. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Théorème II.4.6. *Les polynômes de degré 1 sont les seuls polynômes irréductibles de* $\mathbb{C}[X]$.

Démonstration. D'après le théorème de d'Alembert, tout polynôme P, de degré ≥ 2, admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. P est donc divisible par $(X - \alpha)$, et il n'est pas irréductible. □

Corollaire II.4.7. *(Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$). Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ de $\mathbb{C}[X]$. Sa décomposition en produit de facteurs irréductibles est de la forme :*

$$P = \lambda (X - \alpha_1)^{r_1} \cdots (X - \alpha_p)^{r_p} \quad \textit{avec} \quad r_1 + ... + r_p = n,$$

où $\alpha_1,\ldots\alpha_p$ sont les racines distinctes *de P, $r_1,\ldots,r_p$ leurs multiplicités et λ le coefficient dominant de P.*

Exercice II.4.8. Décomposer $P = X^3 - iX^2 - X + i$ en facteurs irréductibles.

Correction. Le nombre 1 est racine évidente de P. La division euclidienne de P par $X-1$ donne

$$P = (X-1)(X^2 + (1-i)X - i),$$

et, puisque les racines de $X^2 + (1-i)X - i$ sont -1 et i,

$$P = (X-1)(X+1)(X-i).$$

II.4.c. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Théorème II.4.9. *Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont*
- *les polynômes de degré 1*
- *les polynômes de degré 2, dont le discriminant est strictement négatif*

Démonstration.
- Si P est de degré 1, il est irréductible.
- Si P est un polynôme de degré 2 avec $\Delta < 0$, il est irréductible. Sinon, il se décomposerait en produit de deux polynômes, chacun de degré 1 :$P = (aX+b)(cX+d)$. Il aurait deux racines (distinctes ou confondues), et son discriminant serait ≥ 0. Contradiction.
- Si P est un polynôme de degré 2 avec $\Delta \geq 0$, il admet deux racines réelles (distinctes ou confondues) et s'écrit $P = a\,(X-\alpha_1)\,(X-\alpha_2)$. Il n'est pas irréductible.
- Si P est un polynôme de degré $n > 2$, d'après le théorème de d'Alembert, il admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$
  - Ou bien $\alpha \in \mathbb{R}$, P est divisible par $(X-\alpha)$, et il n'est pas irréductible.
  - Ou bien $\alpha \notin \mathbb{R}$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P.
    $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = \left(X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + \alpha\overline{\alpha}\right)$ est un polynôme à coefficients réels.
    On fait la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + \alpha\overline{\alpha})Q + R$ avec $\deg R \leq 1$. Or $R(\alpha) = R(\overline{\alpha}) = 0$ et $\alpha \neq \overline{\alpha}$. Donc $R = 0$.
    Par conséquent, P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car divisible par un polynôme de degré 2.

$\square$

Corollaire II.4.10. *Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$*

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Sa décomposition en produit de facteurs irréductibles est de la forme :

$$P = \lambda\,(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_p)^{r_p}(X^2+\beta_1X+\gamma_1)^{s_1}\cdots(X^2+\beta_kX+\gamma_k)^{s_k}$$

$$\textit{avec } r_1+\cdots+r_p+2(s_1+\cdots+s_k) = n \textit{ et } \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0 \textit{ pour } i = 1,\cdots k$$

Exemple II.4.11. $X^3 + X = X(X^2+1) = X(X+i)(X-i)$
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est $X(X+i)(X-i)$
La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est $X(X^2+1)$.

Exercice II.4.12. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 2\,X^3 + 14\,X^2 - 18\,X + 45$ sachant qu'il admet $1 + 2\,i$ comme racine.

Correction. P est divisible par $(X - 1 - 2\,i)(X - 1 + 2\,i) = X^2 - 2X + 5$. En effectuant la division euclidienne on obtient $P = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 9)$ qui est bien le produit de deux polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ s'en déduit immédiatement :

$$P = (X - 1 - 2\,i)(X - 1 + 2\,i)(X - 3i)(X + 3i).$$

Exercice II.4.13. Décomposer en produit de facteurs irréductibles le polynôme $X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

III. Systèmes linéaires

La référence principale pour ce chapitre est le livre de David C. Lay [1].

On appellera *nombre* ou *scalaire* un nombre réel ou complexe. On posera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'ensemble de ces nombres. Le choix des nombres réels ou complexes est indifférent dans ce chapitre, sauf pour les interprétations géométriques où l'on privilégiera les nombres réels.

III.1. Définitions et premiers exemples

III.1.a. Définitions

Définition III.1.1. Soit $n \geq 1$. On appelle *équation linéaire* à n inconnues $x_1,\ldots,x_n$ une équation de la forme

$$\text{(E)} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b sont fixés dans $\mathbb{K}$. Les scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont appelés *coefficients* de l'équation, b est le *second membre*. Lorsque $b = 0$, on dit que l'équation est *homogène*.

Remarque III.1.2. La notation $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ dans (E) signifie $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Il est impératif de maîtriser ce type de notation.

Définition III.1.3. L'*ensemble des solutions* de (E) est l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$. C'est donc un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$.

Exemple III.1.4.

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$$

est une équation linéaire non-homogène à 3 inconnues.

$$-ix_1 + (2 + i)x_2 - 4x_3 = 0$$

est une équation linéaire (complexe) homogène à 3 inconnues.

$$2x_1^2 + x_2x_3 - 4x_3^3 = 1$$

n'est pas une équation linéaire.

1. David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications.* Troisième édition, 2004

Définition III.1.5. Si $p \geq 1$, on appelle *système linéaire* à p équations et n inconnues un ensemble de p équations linéaires ayant les mêmes n inconnues :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Les scalaires a_{ij}, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$ sont encore appelés les *coefficients* du système. Il est d'usage d'utiliser le premier indice pour numéroter les lignes et le deuxième indice pour numéroter les colonnes. Le p-uplet $b = (b_1, \ldots, b_m)$ est appelé *second membre* du système. Lorsque tous les b_j sont nuls (on dit encore que b est nul), on dit que le système est *homogène*.

L'*ensemble des solutions de* (S) est le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ formé des $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifient *toutes* les équations de (S). On cherche à résoudre le système (S), c'est à dire décrire précisément cet ensemble.

Remarque III.1.6. On peut réécrire le système (S) sous forme abrégée :

$$\forall i = 1 \ldots p, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i.$$

Remarque III.1.7. Lorsque le nombre d'inconnues n est petit, on note souvent x, y, z, t (au lieu de x_1, x_2,...) ces inconnues pour alléger les notations.

Donnons quelques exemples simples.

Exemples III.1.8.

$$\begin{cases} 17(x + 2y) = \sqrt{7}z + 3 \\ \dfrac{x + z}{2} = 12. \end{cases}$$

est un système linéaire non-homogène, à 2 équations et 3 inconnues, que l'on peut écrire sous la forme (S) (avec $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$) :

$$\begin{cases} 17x + 34y - \sqrt{7}z = 3 \\ \dfrac{1}{2}x \;+\; 0y \;+\; \dfrac{1}{2}z = 12. \end{cases}$$

Ici $a_{11} = 17$, $a_{12} = 34$, $a_{13} = -\sqrt{7}$, $a_{21} = \frac{1}{2}$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = \frac{1}{2}$, $b_1 = 3$ et $b_2 = 12$. Le système :

$$\begin{cases} xyz + 7 = 0 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

n'est pas linéaire (la première équation ne peut pas être mise sous la forme d'une équation linéaire). L'équation :

$$\text{(III.1)} \qquad (x + y - 3)^2 + (2x + y + 2)^2 = 0$$

n'est pas linéaire. Toutefois, si l'on cherche à résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$, elle est équivalente au système linéaire :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=-2. \end{cases}$$

Remarquons que dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, l'équation (III.1) ne peut pas être ramenée à un système linéaire.

Exercice III.1.9. Mettre les systèmes linéaires suivants sous la forme (S). Déterminer p, n, et les paramètres a_{ij} et b_i.

$$\begin{cases} 3x+y=4z+3 \\ y=z, \end{cases} \tag{III.2}$$

$$x_1+x_2=x_2+x_3=x_3+x_4=0. \tag{III.3}$$

Les systèmes linéaires apparaissent dans tous les domaines d'applications des mathématiques (économie, industrie...) Dans les applications, p et n sont souvent très grands, et on ne peut pas résoudre le système "à la main". Il existe évidemment de nombreux logiciels informatiques qui en sont capables. Les buts de ce chapitre sont :

- savoir résoudre "à la main" un système lorsque p et n sont petits ;
- comprendre une méthode de résolution d'un système général, la méthode du pivot de Gauss ;
- en déduire quelques propriétés de la structure de l'ensemble des solutions. Cette structure sera précisée au Chapitre V, à travers la notion d'espace vectoriel.

On commence par donner des exemples de résolutions de systèmes linéaires à une ou deux équations et une ou deux inconnues, puis une notation commode (la notation matricielle) avant de dégager une méthode générale.

III.1.b. Exemples de petits systèmes linéaires

Une équation à une inconnue

On fixe $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. On considère l'équation :

$$ax=b. \tag{III.4}$$

Alors :

- Si $a\neq 0$, $x=\frac{b}{a}$ est la seule solution de (III.4).
- Si $a=0$ et $b=0$, l'équation (III.4) s'écrit $0=0$ et tous les $x\in\mathbb{K}$ sont solutions.
- Si $a=0$ et $b\neq 0$, l'équation (III.4) s'écrit $b=0$, il n'y a donc pas de solution.

Remarque III.1.10. L'ensemble des solutions est ou bien vide, ou bien réduit à un seul élément, ou bien infini. Nous verrons plus tard (proposition III.2.28 p. 50) que cette propriété persiste dans le cas d'un système linéaire général.

Une équation, deux inconnues

On considère maintenant l'équation linéaire :

$$ax + by = c. \tag{III.5}$$

Supposons d'abord $(a, b) \neq (0, 0)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on sait que (III.5) est l'équation d'une droite du plan $\mathbb{R}^2$ et il y a une infinité de solutions. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut résoudre le système algébriquement :

- si $b \neq 0$, on peut réécrire (III.5) $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$, et l'ensemble des solutions est

  $$\left\{\left(x, \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x\right),\ x \in \mathbb{K}\right\}.$$

  On dit qu'on a paramétré cet ensemble (x est le paramètre).
- si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation s'écrit $x = c/a$ et l'ensemble des solutions est donné par $\left\{\left(\frac{c}{a}, y\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$.

Lorsque $(a, b) \neq (0, 0)$ il y a donc une infinité de solutions.

Si $(a, b) = (0, 0)$, l'équation (III.5) s'écrit simplement $0 = c$: il y a une infinité de solutions (tous les couples $(x, y) \in \mathbb{K}^2$) si $c = 0$, et aucune solution si $c = 0$.

Remarque III.1.11. Dans ce cas, quelles que soient les valeurs de a, b et c, l'équation (III.5) a ou bien une infinité de solutions, ou bien pas de solution du tout (mais jamais un nombre fini, non nul de solutions : comparer avec la remarque III.1.10).

Remarque III.1.12. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, il y a une infinité de solutions et l'ensemble des solutions est décrit avec un seul paramètre (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cet ensemble est une droite). Lorsque $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, l'ensemble des solutions est infini, mais il faut 2 paramètres pour le décrire (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est un plan).

Deux équation, deux inconnues. Opérations sur les lignes

On considère maintenant un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{III.6}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(a_{11}, a_{12}) \neq (0, 0)$ et $(a_{21}, a_{22}) \neq (0, 0)$, (III.6) décrit l'ensemble des points d'intersection de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ du plan $\mathbb{R}^2$. On a donc trois cas :

- Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèlles : elles ont un unique point d'intersection, et (III.6) n'a qu'une seule solution.
- Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles. Le système (III.6) n'a pas de solution, sauf si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues, auquel cas le système a une infinité de solutions (l'ensemble des coordonnées des points de la droite $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$).

On donne maintenant trois exemples que l'on va résoudre algébriquement, sans utiliser d'argument géométrique.

Exemple III.1.13.

$$\text{(III.7)} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 8 & (L_1) \\ 2x + 5y = 9 & (L_2). \end{cases}$$

Eliminons l'inconnue "x" de la deuxième ligne à l'aide de la première ligne :

$$\text{(III.8)} \qquad \begin{cases} \qquad 3x + 2y = 8 & \\ 0 + \left(5 - \dfrac{4}{3}\right) y = \left(9 - \dfrac{16}{3}\right) & \qquad (L_2) - \dfrac{2}{3}(L_1). \end{cases}$$

La notation $(L_2) - \frac{2}{3}(L_1)$ à la deuxième ligne (on écrira parfois $(L_2) \leftarrow (L_2) - \frac{2}{3}(L_1)$) signifie que l'on a remplacé la deuxième ligne par la différence de la deuxième ligne et du produit de $\frac{2}{3}$ par la première ligne.

$$\text{(III.9)} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 8 & \\ \qquad\quad y = 1 & \qquad {\scriptstyle \frac{3}{11}(L_2).} \end{cases}$$

La notation $\frac{3}{11}(L_2)$ à la deuxième ligne signifie qu'on a multiplié cette ligne par $\frac{3}{11}$. On écrit aussi $(L_2) \leftarrow \frac{3}{11}(L_2)$. Une fois connue la valeur de y il suffit de la substituer dans (L_1) pour obtenir la valeur de x : on obtient $3x = 8 - 2 = 6$, i.e. $x = 2$. Le système (III.7) a donc pour unique solution $(2, 1)$ (en d'autres termes, l'ensemble des solutions est le singleton $\{(2, 1)\}$).

On peut aussi conclure, à partir de (III.9), en utilisant des opérations sur les lignes :

$$\text{(III.10)} \qquad \begin{cases} 3x = 6 & \qquad {\scriptstyle (L_1) - 2(L_2)} \\ \ \ y = 1 & \end{cases} \qquad \text{puis} \qquad \begin{cases} x = 2 & \qquad {\scriptstyle \frac{1}{3}(L_1)} \\ y = 1 & \end{cases}$$

Exemple III.1.14.

$$\text{(III.11)} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 6x + 4y = 20. \end{cases}$$

On élimine x comme dans l'exemple III.1.13

$$\text{(III.12)} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 8 & \\ \qquad\quad 0 = 4 & \qquad {\scriptstyle (L_2) - 2(L_1).} \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution.

Exemple III.1.15.

$$\text{(III.13)} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 6x + 4y = 16. \end{cases}$$

On utilise la même stratégie :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 0 = 0 \qquad {\scriptstyle (L_2)-2(L_1).} \end{cases} \tag{III.14}$$

La deuxième équation est toujours vraie. Le système (III.13) est donc équivalent à l'équation, $3x + 2y = 8$. Il y a, comme pour l'équation (III.5) lorsque $(a, b) \neq (0, 0)$, toute une droite de solutions, l'ensemble

$$\left\{ \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3} y, y \right),\ y \in \mathbb{K} \right\}.$$

III.1.c. Notation matricielle

Une *matrice* $p \times n$ est un tableau de nombre à p lignes et n colonnes. Nous étudierons les matrices de manière plus systématique dans le chapitre IV de ce cours.

Lors des manipulations sur les lignes des exemples précédents, on peut gagner du temps en décidant de ne pas noter les variables :

Définition III.1.16. On appelle *matrice des coefficients* du système (S) la matrice $p \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{22} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

et *matrice augmentée* la matrice $p \times (n + 1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{p1} & a_{22} & \dots & a_{pn} & b_m \end{array}\right]$$

(le trait vertical, facultatif, permet de séparer les coefficients du système du second membre).

On peut reprendre les opérations précédentes en notation matricielle. Par exemple, les manipulations sur les lignes de l'exemple III.1.13 s'écrivent :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 9 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 5 - \frac{4}{3} & 9 - \frac{16}{3} \end{array}\right] {\scriptstyle (L_2)-\frac{2}{3}(L_1)}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] {\scriptstyle \frac{3}{11}(L_2)} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] {\scriptstyle (L_1)-2(L_2)} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] {\scriptstyle \frac{1}{3}(L_1)}$$

ce qui signifie bien $x = 2$, $y = 1$ (cf (III.10)).

Exercice III.1.17. Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \tag{III.15}$$

en utilisant la notation matricielle.

III.2. Méthode du pivot

On veut formaliser et généraliser la méthode précédente pour résoudre des systèmes linéaires quelconques. On commence par donner quelques définitions.

III.2.a. Systèmes équivalents. Opérations élémentaires

Définition III.2.1. Deux systèmes linéaires ayant le même nombre d'inconnues sont *équivalents* lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple III.2.2. Les systèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \quad\ \ y=-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ \quad\ \ x=1 \end{cases} \tag{III.16}$$

En effet, l'ensemble des solutions de ces deux systèmes est $\{(1,-1)\}$. Les deux systèmes suivants ne sont pas équivalents :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \quad\ \ y=-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ \quad\ \ x=-1 \end{cases} \tag{III.17}$$

En effet, l'ensemble des solutions du premier système est $\{(1,-1)\}$, l'ensemble des solutions du deuxième système est $\{(-1,1)\}$.

Définition III.2.3. On appelle *opération élémentaire* sur un système (ou sur les lignes d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes :

i. L'*échange* de deux lignes (L_i) et (L_j), parfois noté $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$.
ii. La multiplication d'une ligne par un scalaire $k \in \mathbb{K}$ *non nul*, appelé *cadrage*, parfois noté $(L_i) \leftarrow k(L_i)$.
iii. L'ajout à une ligne du multiple d'une autre ligne par un scalaire k, appelé *remplacement*, parfois noté $(L_i) \leftarrow (L_i) + k(L_j)$.

Le lecteur est invité à vérifier que toutes les opérations réalisées dans les exemples de la partie III.1 sont des opérations élémentaires au sens de la définition III.2.3. Par exemple, l'opération conduisant à (III.8) est un remplacement, celle conduisant à (III.9) un remplacement.

Remarque III.2.4. Il revient bien sûr au même de faire des opérations élémentaires sur un système d'équations linéaires, ou sur les lignes de la matrice augmentée de ce système.

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions :

Proposition III.2.5. *Soient (S) et (S') deux systèmes linéaires ayant le même nombre d'inconnues et d'équations. On suppose que (S') peut être obtenu à partir de (S) par une série d'opérations élémentaires. Alors (S) et (S') sont équivalents.*

Démonstration. Par une récurrence simple, il suffit de montrer qu'une seule opération élémentaire ne change pas l'ensemble des solutions.

C'est évident si cette opération élémentaire est l'échange de deux lignes.

Si k est fixé, non nul, alors $ky = 0 \iff y = 0$. Le cadrage (multiplication d'une ligne par un scalaire non nul) ne change donc pas l'ensemble des solutions.

Il reste à traiter le cas du remplacement, i.e. l'opération $(L_j) \leftarrow (L_j) + k(L_i)$, où $i \neq j$, $k \in \mathbb{K}$. En ignorant les lignes autres que la i-ième et la j-ième, qui ne changent pas, on est amené à montrer que les deux systèmes

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (L_i) \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j & (L_j) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & (L_i) \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n + k(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) = b_j + kb_i & (L'_j) \end{cases}$$

sont équivalents, c'est à dire que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vérifie (L_i) et (L_j) si et seulement si il vérifie (L_i) et (L'_j).

On suppose d'abord que x vérifie (L_i) et (L_j). Alors

$$\underbrace{a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n}_{=b_j \text{ par } (L_j)} + k\underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)}_{=b_i \text{ par } (L_i).} = b_j + kb_i,$$

ce qui montre (L'_j).

Supposons réciproquement que x vérifie (L_i) et (L'_j). Alors

$$\begin{aligned} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = \underbrace{a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n + k\,(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)}_{=b_j + kb_i \text{ par } (L'_j)} \\ - k\underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)}_{=b_i \text{ par } (L_i)} = b_j, \end{aligned}$$

d'où (L_j). □

Avertissement III.2.6. Pour passer d'un système linéaire à un système équivalent, il est très fortement conseillé de s'en tenir à des opérations élémentaires au sens de la définition (III.2.3). Des opérations sur les lignes mal choisies peuvent changer l'ensemble des solutions. Une erreur typique est de réaliser *simultanément* deux remplacements de la forme $(L_i) \leftarrow (L_i) + k(L_j)$ et $(L_j) \leftarrow (L_j) + k'(L_i)$. Par exemple :

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ donne : } \begin{cases} 3x = 2 & (L_1) + 2(L_2) \\ \frac{3}{2}x = 1 & (L_2) + \frac{1}{2}(L_1). \end{cases} \tag{III.18}$$

Les deux systèmes ci-dessus ne sont pas équivalents : le premier a pour unique solution $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, le deuxième a une infinité de solutions : $\left\{\left(\frac{2}{3}, y\right),\ y \in \mathbb{K}\right\}$. Remarquons que les deux opérations simultanées $(L_2) \leftarrow (L_2) + \frac{1}{2}(L_1)$ et $(L_1) \leftarrow (L_1) + 2(L_2)$ ne peuvent pas s'écrire comme deux remplacements successifs. Le lecteur est invité à méditer cet exemple : pratiquement toutes les erreurs dans les résolutions de système, en dehors des fautes de calcul, sont de cette forme là.

III.2.b. Forme échelonnée

On définit maintenant une classe de matrices correspondant à des systèmes dont on peut décrire l'ensemble des solutions sans aucun calcul supplémentaire. Le but de la méthode du pivot sera de se ramener à ce type de matrice.

Définitions

Définition III.2.7. Soit A une matrice $p \times n$. Une *ligne nulle* de A est une ligne de A formée uniquement de zéros. On appelle *élément de tête* d'une ligne non nulle de A l'élément non nul le plus à gauche de cette ligne. On dit que A est *sous forme échelonnée* (ou simplement *échelonnée*) lorsque les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

i. Toutes les lignes non nulles sont situées au-dessus des lignes nulles.
ii. L'élément de tête de chaque ligne non nulle se trouve dans une colonne (strictement) à droite de l'élément de tête de la ligne précédente.

On dit que A est *sous forme échelonnée réduite* (ou simple *échelonnée réduite*) quand de plus les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

iii. L'élément de tête de chaque ligne non nulle vaut 1.
iv. L'élément de tête de chaque ligne non nulle est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Remarque III.2.8. Le point ii implique que tous les éléments de la matrice situés sous un élément de tête sont nuls.

Définition III.2.9. On dit qu'un système linéaire est *sous forme échelonnée* (respectivement *échelonnée réduite*) quand sa matrice augmentée est sous forme échelonnée (respectivement échelonnée réduite).

Exemples III.2.10. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ n'est pas échelonnée (i n'est pas vérifiée).

La matrice $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas échelonnée (cette fois, ii est faux).

La matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est échelonnée, mais pas échelonnée réduite (iii et iv sont faux).

La matrice $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est échelonnée, mais pas échelonnée réduite (iii est faux).

La matrice $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est échelonnée réduite.

Le système $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$ est sous forme échelonnée réduite.

Exemples III.2.11. Le premier système de (III.10) est sous forme échelonnée non réduite, le dernier système de (III.10) est sous forme échelonnée réduite.

Le système (III.12) est sous forme échelonnée non réduite.

Le système (III.14) est sous forme échelonnée non réduite. Après multiplication de la première ligne par $\frac{1}{3}$, on obtient la forme échelonnée réduite équivalente :

$$\begin{cases} x + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{8}{3} \\ \qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Dans ce système la deuxième ligne $0 = 0$ est bien sûr superflue.

Exercice III.2.12. Déterminer si les systèmes suivants sont sous forme échelonnée (respectivement sous forme échelonnée réduite) :

i. Un système à une seule équation.

ii.
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}, \text{ puis } \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

iii.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

iv.
$$(S_1)\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ \qquad y + 2z = -1 \\ \qquad\qquad z = -4 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \\ \qquad x - z = -4 \end{cases}$$

(cf correction p. 55).

Application aux systèmes linéaires

Définition III.2.13. Le système (S) est dit *compatible* si il a au moins une solution et *incompatible* si il n'a pas de solution.

On peut décrire facilement l'ensemble des solutions d'un système linéaire (S) dont la matrice augmentée A est sous forme échelonnée réduite. On rappelle que si (S) est un système à p équations et n inconnue, la matrice A est une matrice $p \times (n+1)$ (i.e. un tableau de nombres avec p lignes et $n+1$ colonnes).

On distingue deux cas.

– *Premier cas.* Si la colonne la plus à droite (la $n+1$-ème colonne) de A contient un élément de tête (forcément égal à 1) cela se traduit par une équation $0 = 1$, tautologiquement fausse, ce qui montre que le système n'a pas de solution. Le système (S) est incompatible.

– *Deuxième cas.* Supposons que la colonne de droite de A ne contient aucun élément de tête. Dans ce cas, le système est compatible. Donnons une méthode pour décrire l'ensemble des solutions. L'élément de tête de chaque ligne non nulle, situé sur une des n premières colonnes, correspond donc à une des inconnues $x_1, \dots x_n$. On appelle *variable de base* du système toute inconnue x_j telle que la j-ième colonne contient un élément de tête non nul. On appelle *variable libre* ou *paramètre* les autres inconnues. Chaque ligne non nulle donne une expression d'une des variables de base en fonction des paramètres. En faisant varier les paramètres dans $\mathbb{K}$, on obtient exactement l'ensemble des solutions du système. On dit que l'on a obtenu une *description paramétrique* de l'ensemble des solutions. Dans ce cas, le nombre de lignes non nulles est exactement le nombre de variable de bases. Le nombre de paramètre est donc $n - p'$.

On peut maintenant donner une définition plus précise de la résolution d'un système linéaire : résoudre le système (S), c'est donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

Remarque III.2.14. Un cas particulier de système compatible est donné par un système dont la matrice sous forme échelonnée réduite a autant de lignes non nulles qu'il y a d'inconnues. Dans ce cas, toutes les variables sont des variables de base, et il n'y a qu'une seule solution, dont les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont données par les valeurs de la colonne de droite.

Remarque III.2.15. Il n'est pas nécessaire de mettre un système sous forme échelonnée réduite pour savoir si il est compatible ou non : une forme échelonnée non réduite convient tout aussi bien. Par le même raisonnement que précédemment, un système sous forme échelonnée est compatible si et seulement si la colonne de droite de sa matrice augmentée ne contient aucun élément de tête.

Lorsque le système est compatible, la forme échelonnée réduite est commode pour décrire l'ensemble des solutions.

Exemple III.2.16. On suppose que la matrice augmentée du système (S) est

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{array}\right]$$

C'est une matrice de forme échelonnée réduite, dont les éléments de tête sont les "1" en gras. La colonne de droite ne contient aucun élément de tête : le système est compatible. Les variables de base (correspondant aux numéros des colonnes des éléments de tête) sont x_1, x_2 et x_4. Le seul paramètre est x_3. On obtient la description paramétrique suivante de l'ensemble des solutions :

$$x_1 = 4 - x_3,\ x_2 = 3 - 2x_3,\ x_4 = 5,\ x_3 \in \mathbb{K}.$$

En d'autres termes, l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{(4 - x_3, 3 - 2x_3, x_3, 5),\ x_3 \in \mathbb{K}\}.$$

Exemple III.2.17. Supposons que le système a pour matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{array}\right]$$

Cette matrice est sous forme échelonnée (non réduite). Le 2 en bas à droite est un élément de tête situé sur la dernière colonne : le système n'a pas de solution, car la dernière ligne se lit $0 = 2$.

Exemple III.2.18. Supposons que le système a pour matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Cette matrice est sous forme échelonnée réduite, et le système est compatible. Les variables de base sont x_1 et x_3, et les variables libres x_2 et x_4. L'ensemble des solutions est

$$\Big\{ (4 - 2x_2 + x_4, x_2, -5 - 2x_4, x_4)\,,\ (x_2, x_4) \in \mathbb{K}^2 \Big\}.$$

Exercice III.2.19. Dire si les systèmes de l'exercice III.2.12, lorsqu'ils sont sous forme échelonnée réduite, sont compatible. Donner alors une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

(cf correction p. 55).

La proposition suivante permet de compter le nombre de paramètres d'un système sous forme échelonnée réduite. Elle découle des arguments précédents.

Proposition III.2.20. *Un système compatible sous forme échelonnée réduite avec n inconnues et p' équations non nulles se décrit avec $n - p'$ paramètres. En d'autres termes, si le système est sous forme échelonnée réduite, on a :*

***nombre d'inconnues* − *nombre d'équations* = *nombre de degrés de liberté*.**

Cette propriété persiste lorsque le système est sous forme échelonnée non réduite (cf Remarque III.2.29).

Exercice III.2.21. Dire si chacune des matrices suivantes est sous forme échelonnée (respectivement sous forme échelonnée réduite). Le système dont c'est la matrice augmentée est-il compatible ? Si c'est le cas, donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

$$\text{a)}\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \text{b)}\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right], \quad \text{c)}\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(cf correction p. 55).

III.2.c. Méthode du pivot de Gauss

Nous venons de voir qu'un système linéaire dont la matrice augmentée est sous forme échelonnée réduite peut être résolu très facilement. Nous allons maintenant montrer que toute matrice peut être mise sous cette forme par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes. On utilise une méthode appelée *méthode du pivot* ou *du pivot de Gauss*, qui suit exactement la stratégie ébauchée au Chapitre III.1 (cf §III.1.b). Le nom de cette méthode est un hommage au mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mais elle était déjà connue des mathématiciens chinois du 1er siècle de notre ère. D'après Wikipedia "Elle est référencée dans l'important livre chinois *Jiuzhang suanshu* ou *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*, dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre *Fang cheng* (la disposition rectangulaire)".

Soit A une matrice (p, N) (p lignes, N colonnes). On veut transformer A en une matrice échelonnée réduite par une série d'opérations élémentaires sur les lignes. La méthode est divisée en une phase de descente (permettant d'obtenir une matrice échelonnée qui n'est pas forcément réduite) et une phase de remontée. Pour illustrer cette méthode, on l'applique à la matrice

$$A = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

On décrit la méthode pour une matrice générale. Dans le cas d'un système linéaire à n inconnues et p équations, A est la matrice augmentée du système, de taille $p \times (n+1)$ (et donc $N = n+1$).

Phase de descente

Cette phase est divisée en 4 étapes, que l'on doit éventuellement réaliser plusieurs fois.

Etape 1 : choix du pivot. On appelle *colonne pivot* la première colonne non nulle [2]. On choisit sur cette colonne un élément non nul, appelé pivot. Dans notre exemple, la colonne pivot est la première colonne. On peut choisir comme élément pivot le 1 en haut à gauche (en gras).

$$A = \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Etape 2. On échange la première ligne avec la ligne de l'élément pivot. Le pivot devient ainsi l'élément de tête de la première ligne. Dans notre exemple, l'élément pivot est déjà situé sur la première ligne : cette étape ne modifie pas la matrice.

Etape 3. En ajoutant aux autres lignes un multiple adéquat de la première ligne, on annule tous les coefficients de la colonne pivot autre que le pivot. Dans notre exemple,

2. c'est à dire la colonne la plus à gauche qui n'est pas composée uniquement de zéros

cela donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ (L_2)-2(L_1) \\ (L_3)-(L_1) \end{array}.$$

Etape 4. Si la matrice obtenue est sous forme échelonnée, la phase de descente est terminée. Sinon, on applique les étapes 1 à 4 à la matrice à laquelle on a enlevé la première ligne.

Revenons à notre exemple. La matrice A a 3 lignes. On applique les étapes 1 à 4 à la matrice $A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array}\right]$ obtenue à partir de A en enlevant la première ligne. En pratique, on continue à écrire cette première ligne, que l'on ignore.

Étape 1' : On considère donc la matrice $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & -6 & -4 \end{array}\right]$. La colonne pivot (première colonne non nulle lorsqu'on ignore la première ligne) est la deuxième colonne. On doit choisir comme pivot le -2, situé à la troisième ligne de cette colonne.

Étape 2' : on échange la 2ème et la 3ème ligne, la matrice obtenue est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \mathbf{-2} & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{III.19}$$

Étape 3' : les coefficients de la colonne pivot (la deuxième colonne) autre que le pivot sont déjà nuls, il n'y a donc rien à faire. Rappelons que l'on ignore la première ligne. Il n'y a donc que le coefficient situé à la troisième ligne de cette deuxième colonne à considérer. Ce coefficient est bien égal à zéro.

Étape 4' : la matrice obtenue est échelonnée : on arrête ici la phase de descente.

Si A est une matrice échelonnée $p \times N$, et $(a_0, \ldots, a_N)$ sont $N+1$ scalaires tels que $a_0 \neq 0$, la matrice

$$B = \left[\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & \ldots & a_N \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$

(ou tout autre matrice obtenue à partir de B en rajoutant des colonnes de zéros à sa gauche) est une matrice échelonnée $(p+1) \times (N+1)$. De cette remarque, et du fait que toute matrice ayant une seule ligne est échelonnée, on déduit que la phase de descente de la méthode du pivot aboutit bien, après un certain nombre[3] de passages par les étapes 1 à 4, à une matrice échelonnée.

Pour obtenir une matrice échelonnée réduite, on a besoin de deux étapes supplémentaires, qui constituent la phase de remontée.

3. au plus $p-1$

Phase de remontée

Etape 5 : cadrage. On multiplie chaque ligne non nulle par l'inverse de son élément de tête, de telle manière que l'élément de tête de la nouvelle ligne vaut 1. Dans notre exemple :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad -\tfrac{1}{2}(L_2)$$

Etape 6 : on ajoute à chaque ligne un multiple de la dernière ligne non nulle, pour que la colonne au-dessus de l'élément de tête de la dernière ligne ne soit composée que de zéros. On répète cette opération avec l'avant-dernière ligne, etc, jusqu'à la deuxième ligne. Sur notre exemple :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (L_1){-}2(L_1) \\ \\ \\ \end{array}$$

Par construction, la matrice obtenue à l'issue de la phase de remontée est bien une matrice échelonnée réduite : on a transformé en 1 tous les éléments de tête, et en 0 tous les coefficients situés au dessus d'un élément de tête. On a montré :

Théorème III.2.22. *Soit A une matrice. Alors A peut-être transformée par des opérations élémentaires sur les lignes, en une matrice échelonnée réduite.*

Mentionnons que l'on peut en fait démontrer l'unicité de la forme échelonnée réduite :

Théorème III.2.23. *Soit A et B deux matrices échelonnées réduites. Supposons que B puisse être obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes. Alors $A = B$.*

On omet la démonstration, cf par exemple David C. Lay [4], annexe A.

Exercice III.2.24. Programmer dans votre langage informatique préféré la méthode du pivot de Gauss. Tester votre programme sur l'exemple précédent.

Remarque III.2.25. Nous avons décrit la méthode du pivot pour une matrice, il est possible de l'appliquer exactement de la même façon sur un système linéaire. On peut donc résoudre un système linéaire par la méthode du pivot directement ou en passant par la notation matricielle. Ces deux façons de faire sont bien sûr parfaitement équivalentes.

Remarque III.2.26. On déduit de l'exemple donné une description paramétrique de l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 2x + 4y + 8z = 14 \\ x - 2z = 3 \end{cases}$$

4. David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications.* Troisième édition, 2004

dont la matrice augmentée est la matrice A. Le système est compatible : il n'y a pas d'élément de tête sur la dernière colonne de la matrice échelonnée réduite obtenue. Il y a deux variables de base, x et y, et une variable libre z. L'ensemble des solutions est donné par

$$\{(3+2z, 2-3z, z),\ z \in \mathbb{K}\}.$$

Remarque III.2.27. La compatibilité du système peut se vérifier à la fin de la phase de descente, sur la forme échelonnée non réduite (III.19).

En combinant la méthode du pivot de Gauss avec la description de l'ensemble des solutions d'un système sous forme échelonnée réduite, on obtient la propriété suivante, qui généralise la remarque III.1.10 à tous les sytèmes linéaires :

Proposition III.2.28. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire est vide, ou réduit à un seul élément, ou infini.*

Remarque III.2.29. La phase de remontée du pivot de Gauss montre que tout système sous forme échelonnée est équivalent à un système sous forme échelonnée réduite *avec le même nombre de lignes non nulles.* Si (S) est un système *compatible* sous forme échelonnée à n inconnues et p' équations non nulles, l'ensemble des solutions se décrit donc avec exactement $n - p'$ paramètres.

Exercice III.2.30. Combien de paramètres faut-il pour décrire chacune des systèmes suivants ?

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad\ y+2z=2 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ \quad\ y+z=1 \\ \qquad\ z=2 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x+2y+z=2 \\ \qquad x+y=1 \\ \qquad y+z=1 \end{cases}$$

(cf correction p. 56).

Remarque III.2.31. Il y a plusieurs variantes (parfaitement équivalentes) de la méthode du pivot que nous venons de décrire. On peut par exemple échanger les étapes 5 et 6. On peut aussi réaliser l'étape de cadrage 5 pendant la phase de descente. Dans tous les cas il est important de n'utiliser que des opérations élémentaires sur les lignes (cf l'avertissement III.2.6). Ceci est particulièrement important lorsque l'on cherche à résoudre des systèmes avec paramètres (cf §III.3 p. 53).

Récapitulons la méthode générale de résolution d'un système linéaire décrite dans ce chapitre :

- Appliquer la phase de descente de la méthode du pivot de Gauss à la matrice augmentée du système. On obtient une matrice échelonnée.
- Déterminer si le système est compatible : si la colonne de droite contient un élément de tête, le système n'est pas compatible (i.e. il n'y a pas de solution). Sinon il est compatible.
- Si le système est compatible, appliquer la phase de remontée du pivot de Gauss. On obtient une matrice échelonnée réduite. On peut alors donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions à l'aide de cette matrice échelonnée réduite.

Donnons un autre exemple. On considère le système :

$$(S)\left\{\begin{aligned} -x_1+3x_2+x_4&=-6\\ 2x_1-6x_2-2x_4&=12\\ x_1-3x_2+3x_3+6x_4&=1\\ -3x_1+9x_2+3x_3+9x_4&=-21 \end{aligned}\right.$$

Appliquons la méthode du pivot à sa matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & 3 & 0 & 1 & -6\\ 2 & -6 & 0 & -2 & 12\\ 1 & -3 & 3 & 6 & 1\\ -3 & 9 & 3 & 9 & -21 \end{array}\right]$$

Phase de descente

Etape 1 : choix du pivot. La colonne pivot est la première colonne. Le pivot est le -1 en gras.

Etape 2 : la première ligne est déjà la ligne pivot.

Etape 3 :

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 7 & -5\\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle (L_2)+2(L_1)}\\ {\scriptstyle (L_3)+(L_1)}\\ {\scriptstyle (L_4)-3(L_1)} \end{array} \end{array}$$

Etape 4 : on repasse à l'étape 1 en ignorant la première ligne.

Etape 1' : la colonne pivot est la troisième colonne. On choisit le 3 sur la quatrième ligne de cette colonne comme élèment pivot.

Etape 2' : on échange la ligne pivot avec la deuxième ligne (i.e. la "première" ligne de la matrice constituée des trois dernières lignes)

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 7 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle (L_4)}\\ \\ {\scriptstyle (L_2)} \end{array} \end{array}$$

Etape 3' :

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle (L_3)-(L_2)}\\ \\ \end{array} \end{array}$$

Etape 4' : la matrice obtenue est échelonnée. La phase de descente est terminée. On remarque que la colonne de droite ne contient aucun élément de tête : le système est compatible. On passe à la phase de remontée pour obtenir une matrice échelonnée réduite.

Phase de remontée

Etape 5 :

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -(L_1) \\ \frac{1}{3}(L_2) \\ \\ \\ \end{array}$$

Etape 6 : on utilise la ligne (L_3) pour annuler les éléments de la troisième colonne au-dessus de l'élément de tête :

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (L_1)+(L_3) \\ (L_2)-2(L_3) \\ \\ \\ \end{array}$$

La matrice obtenue est sous forme échelonnée réduite. Il n'y a qu'une seule variable libre, x_2.

Une description paramétrique des solutions est donnée par :

$$\{(3x_2 + 4, x_2, 3, -2),\ x_2 \in \mathbb{K}\}.$$

Exercice III.2.32. Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4z = -12 \\ -x + y + 3z = 9 \\ x - y + z = 3. \end{cases}$$

III.2.d. Système de Cramer

Les coefficients (a_{ij}) d'un système linéaire (S) étant fixés, la compatibilité de (S) dépend en général de son second membre (b_i). On présente ici un cas particulier, appelé "système de Cramer" pour lequel le système est compatible quelques soient les (b_i).

Proposition III.2.33. *Soit (S) un système linéaire de n équations à n inconnues. Supposons que (S) a une et une seule solution. Alors tout système obtenu à partir de (S) en changeant seulement le second membre a une seule solution.*

Définition III.2.34. Un système (S) vérifiant les hypothèses de la proposition III.2.33 est appelé *système de Cramer*.

Remarque III.2.35. Le fait d'être un système de Cramer ne dépend pas du second membre du système, mais seulement de ses coefficients.

Preuve de la proposition III.2.33. Par des opérations élémentaires sur les lignes, on peut, d'après la méthode du pivot de Gauss, se ramener à un système sous forme échelonnée réduite (S') ayant le même ensemble de solutions que (S). Soit p' le nombre de lignes non nulles de ce système. Le système étant compatible, le nombre de paramètres permettant de décrire l'ensemble des solutions est, d'après la proposition III.2.20, $n - p'$. Mais on ne peut pas avoir $n - p' \geq 1$, sinon l'ensemble des solutions serait infini. On a donc $n = p'$: la forme échelonnée réduite du système a n lignes non nulles, aucune ligne nulle, aucune équation de la forme $0 = 1$ et s'écrit donc :

$$\text{(III.20)} \qquad \begin{cases} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \\ \\ x_n = b'_n. \end{cases}$$

Lorsque l'on change le membre de droite du système (S) sans toucher au membre de gauche, on ne change que le membre de droite du système (III.20), puisque ce dernier est obtenu par des opérations élémentaires sur les lignes qui ne mélangent jamais le membre de gauche et le membre de droite des équations. Ceci montre que tout système obtenu à partir de (S) en ne changeant que le membre de droite n'a qu'une seule solution. □

Remarque III.2.36. De manière équivalente, on pourrait définir un système de Cramer comme un système à n équations et n inconnues qui a une forme échelonnée réduite du type (III.20).

Exercice III.2.37. Dire *avec le moins de calculs possibles* si les systèmes suivants ont une unique solution, pas de solution ou une infinité de solutions. On identifiera en particulier les systèmes homogènes et les systèmes de Cramer. Les systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) ont pour inconnues x, y et z. Les systèmes (S_4) et (S_5) x, y, z et t.

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ x + y + 2z = -5 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + 3y + z = 4 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} x + 3y + z = -17 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + y - z + 5t = 3 \\ 2x + y + 2z + 4t = 1 \end{cases}, \quad (S_5) \quad x = 2y + 2t = 3z + 4(x + y) = 6x + y + z + t.$$

(cf correction p. 56).

III.3. Système avec paramètres

On considère parfois une famille de systèmes (S_λ) dépendant d'un paramètre λ. Le but est de résoudre le système selon les valeurs de λ. Il faut traiter ce type de problème avec précaution. Une erreur classique est de diviser une équation par une quantité, dépendant de λ, qui s'annule pour une certaine valeur de λ. On donne ici deux exemples de résolutions détaillées.

Exercice III.3.1. Résoudre, selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système suivant :

$$\text{(III.21)} \qquad \begin{cases} -x + (2\lambda - 6)y - 2z = -7 \\ -x + (4\lambda - 12)y - 2z = -11 \\ x + (3 - \lambda)y + 2z = 5 \end{cases}$$

Correction. On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x+(3-\lambda)y+2z=5 & (L_3) \\ -x+(4\lambda-12)y-2z=-11 & \\ -x+(2\lambda-6)y-2z=-7 & (L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+(3-\lambda)y+2z=5 & \\ (-9+3\lambda)y=-6 & (L_2)+(L_1) \\ (-3+\lambda)y=-2 & (L_3)+(L_1) \end{cases}$$

On remarque que les lignes (L_2) et (L_3) du dernier système sont équivalentes. Précisément, (L_2) vaut exactement $3(L_3)$. Le système (III.21) est donc équivalent à

$$\begin{cases} x+(3-\lambda)y+2z=5 \\ (-3+\lambda)y=-2 \end{cases} \tag{III.22}$$

Ce système est sous forme échelonnée. En regardant le coefficient de y dans la deuxième ligne, on voit qu'il faut distinguer deux cas.

1er cas : $\lambda=3$. La deuxième ligne de (III.22) s'écrit $0=-2$. Le système n'a pas de solution.

2ème cas : $\lambda\neq 3$ On obtient :

$$\begin{cases} x+2z=3 & (L_1)+(L_2) \\ (-3+\lambda)y=-2 & \end{cases}.$$

En prenant x et y comme variable de base et z comme paramètre, on obtient que l'ensemble des solutions est $\left\{(3-2z,\frac{2}{3-\lambda},z),\ z\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice III.3.2. Résoudre, selon la valeur de $\lambda\in\mathbb{R}$, le système de matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-4 \\ -2 & 2+2\lambda & 12-4\lambda \\ 2 & -2\lambda & -4+2\lambda \end{array}\right] \tag{III.23}$$

Correction.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-4 \\ 0 & 0 & 4-2\lambda \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle (L_2)+2(L_1)} \\ {\scriptstyle (L_3)-2(L_1)} \end{array}$$

Le système obtenu est presque sous forme échelonnée (il suffirait d'échanger les lignes 2 et 3). La ligne 2 se lit $4-2\lambda=0$. On distingue deux cas :

1er cas : $\lambda\neq 2$. La ligne 2 est contradictoire. Le système n'est pas compatible.

2ème cas : $\lambda=2$. La ligne 2 se lit $0=0$. En notant x et y les variables, le système est équivalent à :

$$x-3y=-2 \text{ et } 2y=4,$$

soit $(x,y)=(2,4)$.

Remarquons que l'on peut parfois ramener un système non-linéaire à un système linéaire avec paramètre :

Exercice III.3.3. En utilisant les exercices précédents, résoudre les systèmes

$$(S_1)\begin{cases} -x_1+(2x_2-6)x_3-2x_4=-7 \\ -x_1+(4x_2-12)x_3-2x_4=-11 \\ x_1+(3-x_2)x_3+2x_4=5 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x-(1+z)y=z-4 \\ -2x+(2+2z)y=12-4z \\ 2x-2zy=-4+2z \end{cases}$$

(cf correction p. 57).

III.4. Réponse à certains exercices

Exercice III.2.12

i. Une matrice à une ligne est toujours sous forme échelonnée. Elle est sous forme échelonnée réduite si et seulement si son premier coefficient non nul vaut 1. L'équation (ou le "système" à une équation) correspondant est sous forme échelonnée réduite si et seulement si le coefficient de la première variable qui apparaît dans le système vaut 1.

ii. La matrice du premier système est $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$, celle du deuxième système est $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$. Le premier n'est pas sous forme échelonnée. Le deuxième est sous forme échelonnée (non réduite). On peut donc tranformer, en échangeant l'ordre des variables, un système non-échelonné en un système échelonné.

iii. échelonnée non réduite/ non échelonnée / échelonnée réduite.

iv. échelonné réduit/ échelonné non réduit / non échelonné.

Exercice III.2.19

ii. L'ensemble des solutions du deuxième système est donné par : $\Big\{(2-x_3, 3-x_3, x_3),\ x_3 \in \mathbb{K}\Big\}$.

iii. L'ensemble des solutions du système dont la matrice augmentée est la troisième matrice est donné par $\Big\{(x_1, x_2, 1-2x_5-3x_6, -2+3x_6, x_5, x_6),\ (x_1, x_2, x_5, x_6) \in \mathbb{K}^4\Big\}$.

iv. Le système (S_1) a évidemment pour unique solution $(1, 2, 3)$.

Exercice III.2.21

La matrice a) est sous forme échelonnée. La dernière colonne ne contient pas d'élément de tête : le système est compatible. Pour décrire l'ensemble des solutions, ont peut facilement mettre la matrice sous forme échelonnée réduite (par le remplacement $(L_1) \leftarrow (L_1)+2(L_2)$). On obtient la matrice (en omettant la dernière ligne, inutile, qui signifie $0=0$) :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Une description paramétrique de l'ensemble des solutions est donnée par :

$$\Big\{(4-2x_2-3x_3,x_2,x_3,2),\ (x_2,x_3)\in\mathbb{K}^2\Big\}.$$

La matrice b) n'est pas sous forme échelonnée. La dernière ligne de cette matrice signifie $4=0$: le système n'est pas compatible.

La matrice c) est échelonnée réduite. L'ensemble des solutions est :

$$\Big\{(1+3x_4,2-3x_4,-4x_4,x_4),\ x_4\in\mathbb{K}\Big\}.$$

Exercice III.2.30

Les systèmes (S_1) et (S_2) sont sous forme échelonnée et compatibles (il est facile de trouver une solution en fixant y pour le premier et z pour le deuxième). Le système (S_1) a 3 inconnues et 2 lignes non nulles, on décrit l'ensemble des solutions avec $3-2=1$ paramètre. Le système (S_2) a 3 inconnues et 3 équations : on décrit l'ensemble des solutions avec $3-3=0$ paramètre : il a une unique solution.

Le système (S_3) n'est pas sous forme échelonnée. De fait, la ligne (L_1) est la somme des lignes (L_2) et (L_3). Il est équivalent au système (S_3') obtenu en retirant la ligne (L_3) au système (S_3). Ce système (S_3') est échelonné, on peut décrire l'ensemble des solutions de (S_3) avec $3-2=1$ paramètre.

Exercice III.2.32 : il y a une infinité de solutions. L'ensemble des solutions peut s'écrire

$$\{(x,x,3),\ x\in\mathbb{K}\}\,.$$

Exercice III.2.37

Par les remplacements $(L_2)\leftarrow(L_2)-(L_1)$ et $(L_3)\leftarrow(L_3)-(L_1)$, on voit que le système (S_1) est équivalent au système

$$\begin{cases} x+3y+z=2\\ \quad -2y+z=-7\\ \qquad\qquad z=0\end{cases}$$

Ce dernier système est un système échelonné compatible à trois équations non nulles pour trois inconnues : c'est donc un système de Cramer, qui a une unique solution. De plus, par la Proposition III.2.33 sur les systèmes de Cramer, tout système obtenu à partir de (S_1) en ne changeant que le second membre sont aussi des systèmes de Cramer : on en déduit que (S_2) et (S_3) sont des systèmes de Cramer (et ont donc chacun une et une seule solution).

Le système (S_4) est un système homogène avec 3 équations et 4 inconnues. Il a donc une infinité de solutions. Le système (S_5) est équivalent à :

$$\begin{cases} x-(2y+2t)=0\\ x-3z-4(x+y)=0\\ x-(6x+y+z+t)=0\end{cases}$$

C'est donc aussi un système homogène à 3 équations et 4 inconnues : il a une infinité de solutions.

Exercice III.3.3

Les deux systèmes proposés *ne sont pas* des systèmes linéaires, mais se ramènent à des systèmes linéaires en fixant une des variables.

Si l'on fixe x_2, le système (S_1) est un système linéaire d'inconnues (x_1, x_3, x_4). Plus précisément, c'est exactement le système (III.21) avec $x = x_1$, $y = x_3$, $z = x_4$ et le paramètre $\lambda = x_2$. L'ensemble des solutions est donné par la résolution du système (III.21) :

$$\left\{ \left(3 - 2x_4, x_2, \frac{2}{3 - x_2}, x_4 \right),\ x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\},\ x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si l'on fixe z, le système (S_2) est un système linéaire. Plus précisément, c'est le système d'inconnue (x, y), dont la matrice augmentée est donnée par (III.23) avec $z = \lambda$. On déduit de la résolution de ce système que l'unique solution du système (S_2) est $(x, y, z) = (4, 2, 2)$.

Table des matières