V. Applications linéaires

Référence pour ce chapitre : Liret-Martinais [1].

On notera comme d'habitude $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une application linéaire est une application d'un espace vectoriel dans un autre qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel. Une base de l'espace vectoriel de départ et une base de l'espace vectoriel d'arrivée étant données, ces applications linéaires s'identifient aux matrices, vues au chapitre II, la composition des applications s'identifiant au produit matriciel. La partie V.1 de ce chapitre est consacrée à des définitions et des propriétés élémentaires, la partie V.2 à la correspondance entre les applications linéaires et les matrices. En V.3, on définit des opérations sur les applications linéaires et on identifie ces opérations aux opérations matricielles. La suite du chapitre est consacrée au lien des applications linéaires avec les objets étudiés au chapitre IV : bases, sous-espaces vectoriels, dimension.

V.1. Définitions et premières propriétés

V.1.a. Définitions et exemples

Soit E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On notera $\vec{0}_E$ (respectivement $\vec{0}_F$) le vecteur nul de E (respectivement F).

Définition V.1.1. Soit f une application de E dans F. On dit que f est une *application linéaire* de E dans F quand les deux conditions suivantes sont respectées :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \tag{V.1}$$

$$\forall \vec{x} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}). \tag{V.2}$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Une application linéaire de E dans E est appelée *endomorphisme* de E. On note pour simplifier $\mathcal{L}(E)$ (au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples V.1.2.

i. Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'application $h_\lambda : \vec{x} \mapsto \lambda \vec{x}$ est un endomorphisme de E, appelée *homothétie* de rapport λ. L'application h_1 est simplement l'identité de E.

ii. L'application constante nulle, $\vec{x} \mapsto \vec{0}_F$ est une application linéaire de E dans F, notée 0.

iii. L'application f définie par $f(x, y) = 3x - 4y$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La même formule définit une application linéaire de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$.

iv. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet,
$$f(2 \times 1) = f(2) = 8 \text{ mais } 2f(1) = 2 \neq 8.$$

v. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation R_θ de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle θ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet, on a la formule (à vérifier) :
$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$
dont on déduit facilement le résultat annoncé. Voir aussi l'exercice V.1.4 plus loin.

V.1.b. Quelques propriétés

Proposition V.1.3. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.*

Démonstration.
$$f(\vec{0}_E) = f(0 \times \vec{0}_E) = 0 f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$
□

Exercice V.1.4. Soit M un point du plan $\mathbb{R}^2$, différent de l'origine $(0,0)$, et $\theta \in (0, 2\pi)$. La rotation f de $\mathbb{R}^2$ de centre M et d'angle θ est-elle une application linéaire ?

(cf correction p. 66).

Proposition V.1.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ des éléments de E. Alors*
$$f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{u}_k) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + \lambda_k f(\vec{u}_k).$$

Démonstration. Si $k = 2$, on démontre la formule en utilisant successivement les conditions (V.1) et (V.2) de la définition V.1.1 :
$$f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = f(\lambda_1 \vec{u}_1) + f(\lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \lambda_2 f(\vec{u}_2).$$
Le cas général se démontre par récurrence sur k. □

Corollaire V.1.6. *On suppose E de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E, et $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ des vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*
$$\forall j = 1 \ldots n, \quad f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j. \tag{V.3}$$

[1] François Liret et Dominique Martinais. *Algèbre 1ère année - Cours et exercices avec solutions.* Dunod, deuxième édition, 2003

Démonstration. Supposons que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifie (V.3). Soit $\vec{x}$ un élément de E et $(x_1,\dots,x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors par la proposition V.1.5

$$f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n) = x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_n\vec{v}_n, \tag{V.4}$$

ce qui montre l'unicité de f vérifiant (V.3). Pour montrer l'existence, il suffit de définir f par la formule (V.4), ce qui a un sens puisque $\mathcal{B}$ est une base de E. On vérifie aisément que l'application obtenue est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$. □

Exemple V.1.7. Soit $\vec{u} = (1,3)$, $\vec{v} = (1,4)$. Alors il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(\vec{u}) = (-1,2,3)$, $f(\vec{v}) = (0,0,0)$.

Exercice V.1.8. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f(x,y)$ où f est l'application de l'exemple précédent. (Correction p. 66).

V.2. Applications linéaires et matrices

V.2.a. Matrice de représentation d'une application linéaire

On montre ici que sur les espaces vectoriels de dimension finie [2], une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée étant données, une application linéaire s'identifie à une matrice.

On rappelle que l'on identifie $\mathbb{K}^n$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes à n lignes : un élément de $\mathbb{K}^n$ sera noté indifféremment $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ou $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (cf par exemple la formule (V.5) plus bas : la première notation est utilisé pour le terme de gauche de la première égalité, la seconde notation est utilisée pour tous les autres termes).

Définition V.2.1. Soit E, F des espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. La *matrice de représentation de* f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (ou plus simplement *matrice* de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$), notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est la matrice $p \times n$ dont le coefficient (i,j) est donné par la i-ème coordonnée de $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. En d'autres termes, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est donnée par les coordonnées de $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ étant fixées, on montre facilement que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ [3]. Il est donc équivalent de considérer les applications linéaires de E dans F et les matrices $p \times n$. Le point de vue "application linéaire" est intrinsèque : il ne dépend pas du choix de bases de E et F. Le point de vue matriciel n'a pas cette propriété, mais est plus adaptée aux calculs explicites.

2. On rappelle que tous les exemples d'espaces vectoriels vus dans ce cours sont de dimension finie.

3. En d'autres termes, l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est une bijection, cf V.4.c p. 59 pour un rappel sur les bijections.

V.2.b. Exemple : cas des bases canoniques

Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Alors, en notant $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\dots,x_n) &= f(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n) \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{V.5}$$

On peut donc facilement reconnaître une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$: chacune de ses coordonnées dans $\mathbb{K}^p$ est donnée, comme dans (V.5), par une combinaison linéaire de coordonnées dans $\mathbb{K}^n$. De plus, on lit sur cette formule les coefficients de la matrice de l'application linéaire dans les bases canoniques.

Exemple V.2.2. La formule

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (\pi x_1 + 4x_3 + x_5, ix_3 + \sqrt{2}x_4 + x_5, -x_1 + x_2, x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4) \tag{V.6}$$

que l'on peut encore écrire :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \begin{bmatrix} \pi x_1 + 4x_3 + x_5 \\ ix_3 + \sqrt{2}x_4 + x_5 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \end{bmatrix} \tag{V.7}$$

définit une application linéaire de $\mathbb{C}^5$ dans $\mathbb{C}^4$. Sa matrice dans les bases canoniques est :

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple V.2.3. La matrice de représentation de la rotation R_θ de centre 0 et d'angle θ (cf Exemple V.1.2, v) est :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

V.2.c. Cas général

Donnons un exemple de calcul de matrice de représentation dans des bases autres que les bases canoniques.

Exemple V.2.4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ défini par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} \tag{V.8}$$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, où

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Calculons

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

La formule (V.8) nous donne :

$$f(\vec{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}_1, \quad f(\vec{u}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{v}_2.$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que cette matrice est complètement différente de la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, qui se lit sur la formule (V.8).

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est beaucoup plus simple que sa matrice dans les bases canoniques. On voit ici l'intérêt de choisir une autre base que la base canonique pour écrire la matrice d'une application linéaire.

Comme le montre l'exemple précédent, le calcul de la matrice de représentation d'une application linéaire f dans les bases $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$, $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ se décompose en deux étapes :

— le calcul de $f(\vec{u}_1)$, ..., $f(\vec{u}_n)$;

— le calcul des coordonnées de $f(\vec{u}_1)$,...,$f(\vec{u}_n)$ dans la base $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$: soit, en général, la résolution de n systèmes de Cramer, chacun à p équations et p inconnues. Dans l'exemple précédent, ce calcul était immédiat.

Il est aussi possible de déterminer la matrice de représentation de f par des calculs matriciels, à l'aide de la formule de changement de bases qui n'est pas au programme du cours cette année mais est donnée en complément (cf partie V.6).

V.2.d. Un exemple de changement de base

Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On se donne deux bases de E, $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ et deux bases de F, $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$. Peut-on exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ en fonction de $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$? La formule de changement de bases (cf partie V.6), hors programme cette année, permet de répondre à cette question. On peut aussi le faire par des calculs directs. On donne ici un exemple d'un tel calcul.

On suppose $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\widetilde{\mathcal{B}} = (\vec{\tilde{u}}_1, \vec{\tilde{u}}_2)$, $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, $\widetilde{\mathcal{C}} = (\vec{\tilde{v}}_1, \vec{\tilde{v}}_2, \vec{\tilde{v}}_3)$ avec

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\tilde{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\tilde{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\tilde{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\tilde{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\tilde{v}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On suppose de plus

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

On chercher à calculer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$.

Première étape. On commence par calculer $f(\vec{\tilde{u}}_1)$ et $f(\vec{\tilde{u}}_2)$. Puisqu'on connaît $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$, il suffit de trouver les coordonnées de $\vec{\tilde{u}}_1$ et $\vec{\tilde{u}}_2$ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\vec{\tilde{u}}_1 = \vec{u}_1 \text{ et } \vec{\tilde{u}}_2 = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2$$

(la deuxième égalité s'obtient par résolution du système $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 0$). Donc, en utilisant l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$,

$$f(\vec{\tilde{u}}_1) = f(\vec{u}_1) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3,$$

$$f(\vec{\tilde{u}}_2) = \frac{1}{2}f(\vec{u}_1) + \frac{1}{2}f(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\left(-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3\right) = \vec{v}_2 + \frac{5}{2}\vec{v}_3.$$

Deuxième étape. On a obtenu les coordonnées de $f(\vec{\tilde{u}}_1)$ et $f(\vec{\tilde{u}}_2)$ dans la base $\mathcal{C}$. On a besoin des coordonnées de ces vecteurs dans la base $\widetilde{\mathcal{C}}$. Il suffit pour cela d'écrire les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ en fonction de $\vec{\tilde{v}}_1$, $\vec{\tilde{v}}_2$ et $\vec{\tilde{v}}_3$. En résolvant pour chaque vecteur un système linéaire (dans ce cas précis, échelonné) de trois équations à trois inconnues, on obtient

$$\vec{v}_1 = 2\vec{\tilde{v}}_1 - \vec{\tilde{v}}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{\tilde{v}}_2, \quad \vec{v}_3 = -\vec{\tilde{v}}_1 + \vec{\tilde{v}}_3.$$

D'où, en utilisant la première étape,

$$f(\vec{\tilde{u}}_1) = -(2\vec{\tilde{v}}_1 - \vec{\tilde{v}}_2) + 2\vec{\tilde{v}}_2 + 3(\vec{\tilde{v}}_3 - \vec{\tilde{v}}_1) = -5\vec{\tilde{v}}_1 + 3\vec{\tilde{v}}_2 + 3\vec{\tilde{v}}_3,$$

et
$$f(\vec{u}_2) = \vec{v}_2 + \frac{5}{2}(-\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = -\frac{5}{2}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \frac{5}{2}\vec{v}_3.$$
On en déduit
$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

V.2.e. Applications linéaires et multiplication par une matrice

La proposition suivante donne une façon plus concrète d'interpréter $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Proposition V.2.5. *Sous les conditions de la définition V.2.1, on se donne un vecteur $\vec{x}$ de E de coordonnées $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$ les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{C}$. Alors*
$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\, X.$$

Démonstration. Notons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$. Alors
$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_n f(\vec{u}_n) \\ &= x_1\left(\sum_{i=1}^p a_{i1}\vec{v}_i\right) + x_2\left(\sum_{i=1}^p a_{i2}\vec{v}_i\right) + \ldots + x_n\left(\sum_{i=1}^p a_{in}\vec{v}_i\right) \end{aligned}$$
En regroupant les termes de la dernière ligne de l'inégalité précédente, on voit que pour $i = 1\ldots p$, la coordonnée y_i de $\vec{v}_i$ est donnée par
$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$
ce qui signifie bien que $Y = AX$ au sens du produit matriciel. □

Exemple V.2.6. Reprenons l'application linéaire f de l'exemple V.2.4. Les coordonnées de $f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ dans la base $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ sont données par le produit matriciel :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
En d'autres termes :
$$f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

En identifiant $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définit une application linéaire
$$X \mapsto AX$$
de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$. En fait, toute application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ est de cette forme :

Proposition V.2.7. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Alors f est l'application linéaire*
$$X \mapsto AX.$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la proposition V.2.5. Si X est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (respectivement de $\mathbb{R}^p$), le vecteur de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^p$) est également X. □

Exemple V.2.8. L'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$ est l'application $X \mapsto AX$, avec
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

V.3. Opérations sur les applications linéaires

V.3.a. Addition et multiplication par un scalaire

Définition V.3.1. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mu \in \mathbb{K}$. On définit les applications $f + g$ et μf de E dans F par :
$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad (\mu f)(\vec{x}) = \mu f(\vec{x}).$$
Dans les deux égalités de la ligne précédente, l'addition et la multiplication par μ apparaissant dans le membre de droite de chaque égalité sont l'addition et la multiplication par μ de l'espace vectoriel F.

Proposition V.3.2. *Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mu \in \mathbb{K}$, les applications $f + g$ et μf données par la définition V.3.1 sont des éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de E. En utilisant successivement la définition de $f + g$, la linéarité de f et g, la commutativité de l'addition sur F puis à nouveau la définition de $f + g$, on obtient :
$$\begin{aligned} (f + g)(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x} + \vec{y}) + g(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{x}) + g(\vec{y}) \\ &= f(\vec{x}) + g(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{y}) = (f + g)(\vec{x}) + (f + g)(\vec{y}). \end{aligned}$$
De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$(f + g)(\lambda\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) + g(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x}) = \lambda(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = (\lambda(f + g))(\vec{x}).$$
Donc $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$. La démonstration du fait que μf est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ si $\mu \in \mathbb{K}$ est très proche et laissée au lecteur. □

Remarque V.3.3. On montre aisément que l'addition et la multiplication par un scalaire ainsi définies sur $\mathcal{L}(E,F)$ lui confèrent une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, au sens de la définition générale IV.1.4. Cette propriété ne sera pas utilisée dans ce cours.

Exemple V.3.4. Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définis par

$$f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_2 - 2x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$(2f)(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$(f+g)(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

V.3.b. Composition

On rappelle que si E, F et G sont des ensembles, f est une application de E dans F et g est une application de F dans G, la *composée* de f et g, noté $g \circ f$, est définie par

$$\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

C'est un application de E dans G.

Proposition V.3.5. *Soient E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.*

Démonstration. Si $\vec{x}, \vec{y} \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$g \circ f(\vec{x}+\vec{y}) = g(f(\vec{x}+\vec{y})) = g(f(\vec{x})+f(\vec{y})) = g(f(\vec{x}))+g(f(\vec{y})) = (g\circ f)(\vec{x})+(g\circ f)(\vec{y}).$$

et

$$g \circ f(\lambda\vec{x}) = g(f(\lambda\vec{x})) = g(\lambda f(\vec{x})) = \lambda(g \circ f(\vec{x})).$$

□

Exercice V.3.6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ donnés par $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ et $g(x) = (x, -2x, 3x)$. Calculer $g \circ f$.

Exercice V.3.7. On note R_θ la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre $\vec{0}_{\mathbb{R}^2}$. Soit $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$. Déterminer $R_\theta \circ R_\sigma$.

Quelle est la composée de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ d'axe Ox et de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ d'axe Oy ?

V.3.c. Effet des opérations sur les matrices

Les opérations sur les applications linéaires se traduisent facilement en terme de matrices de représentations :

Proposition V.3.8. *i. Soit E, F des espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base F. Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f_1) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f_2).$$

ii. Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des bases de respectivement E, F et G. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Le point (ii) signifie que la composition des applications se traduit par le produit matriciel de leurs matrices de représentations. Remarquons que le produit matriciel de la dernière ligne de la proposition est bien défini : si $n = \dim E$, $p = \dim F$ et $q = \dim G$, le premier facteur du membre de droite est une matrice $q \times p$, le deuxième une matrice $p \times n$. Le produit obtenu est bien une matrice $q \times n$.

Avertissement V.3.9. Attention à l'ordre des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans le terme de droite de la formule du point (ii).

Démonstration. Nous ne démontrerons que le point (ii). La preuve (plus facile) du point (i) est laissée au lecteur.

On note n, p et q les dimensions respectives des espaces vectoriels E, F et G. Soit $X \in \mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $\vec{x}$ le vecteur de E de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de $f(\vec{x}) \in F$ dans la base $\mathcal{C}$, et $Z \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de $g \circ f(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) \in G$ dans la base $\mathcal{D}$. Par la proposition V.2.5, appliquée successivement à f, g et $g \circ f$

$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X, \quad Z = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X$$

et

$$Z = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)X.$$

On en déduit

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)X, \tag{V.9}$$

ce qui montre l'égalité

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f).$$

En effet, pour passer de (V.9) à cette dernière ligne, il suffit d'appliquer (V.9) aux vecteurs $X = \vec{e}_1, \ldots, X = \vec{e}_n$, où $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est la base canonique de $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$.

□

Remarque V.3.10. Le (ii) justifie a posteriori la définition du produit matriciel.

Exercice V.3.11. Soit $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^3$, $G=\mathbb{R}^2$. On suppose

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix},\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)=B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

a. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g\circ f)$.

b. La matrice AB est-elle la matrice de représentation d'une certaine application linéaire dans des bases que l'on précisera ?

(cf correction p. 66)

Exercice V.3.12. Soit, pour $\theta\in\mathbb{R}$,

$$M_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Exprimer, pour $\theta,\sigma\in\mathbb{R}$, la matrice $M_\theta M_\sigma$ en fonction d'une certaine matrice M_ρ (ρ à déterminer). Comparer avec l'exercice V.3.7.

V.4. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

V.4.a. Rappels

Commençons par rappeler quelques définitions :

Définition V.4.1. Soit f une application de E dans F, où E et F sont des ensembles.

i. Si $A\subset E$, l'*image* de A par f, notée $f(A)$, est le sous-ensemble de F :
$$f(A)=\Big\{f(a),\ a\in A\Big\}=\Big\{b\in F \text{ t.q. } \exists a\in E,\ b=f(a)\Big\}.$$

ii. Si $B\subset F$, l'*image réciproque*[4] de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est le sous-ensemble de E :
$$f^{-1}(B)=\{a\in E \text{ t.q. } f(a)\in B\}.$$

iii. On dit que f est *injective* lorsque chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ, i.e :
$$\forall x,y\in E,\quad f(x)=f(y)\Longrightarrow x=y,$$
ou de manière équivalente :
$$\forall x,y\in E,\quad x\neq y\Longrightarrow f(x)\neq f(y)$$
(deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes).

iv. On dit que f est *surjective* lorsque chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ, i.e. lorsque $f(E)=F$.

v. On dit que f est *bijective* lorsqu'elle est injective et surjective. C'est à dire :
$$\forall z\in F,\ \exists! x\in E,\ \text{t.q. } z=f(x).$$

On appelle *injection*, *surjection*, *bijection* une application injective (respectivement surjective, bijective).

Remarque V.4.2. Il découle immédiatement de la définition d'une bijection qu'une application $f:E\to F$ est bijective si et seulement si elle admet une *application réciproque*, i.e. une application $g:F\to E$ telle que $f\circ g=\mathrm{Id}_F$ et $g\circ f=\mathrm{Id}_E$. Cette application est notée f^{-1}. Remarquons que cette même notation est utilisée pour désigner l'image réciproque $f^{-1}(F)$ d'un ensemble F *même lorsque f n'est pas inversible*. De plus, on n'a pas toujours $f(f^{-1}(B))=B$ ou $f^{-1}(f(A))=A$ (cf l'exercice V.4.4).

Avertissement V.4.3. L'injectivité d'une application dépend du choix de l'ensemble de départ. Sa surjectivité et sa bijectivité des choix de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée (cf de nouveau l'exercice V.4.4).

Exercice V.4.4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction $x\mapsto x^2$. Calculer , $f^{-1}(]-\infty,0[)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}([0,+\infty[)$, $f(\mathbb{R})$, $f([0,+\infty[)$, puis $f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right)$ et $f^{-1}\left(f([0,+\infty[)\right)$. La fonction f est-elle surjective (respectivement injective, bijective) lorsqu'elle est considérée :

i. comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

ii. comme une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,+\infty[$?

iii. comme une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$?

iv. comme une application de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$?

(Réponse p. 66).

V.4.b. Image et noyau d'une application linéaire

Définition V.4.5. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. L'image $f(E)$ de E par f est appelée *image de f* et notée $\mathrm{Im}(f)$. L'image réciproque $f^{-1}(\{\vec{0}_F\})$ de $\{\vec{0}_F\}$ par f est appelée *noyau de f* et notée[5] $\mathrm{Ker}(f)$.

Remarque V.4.6. En d'autres termes, l'image de f est l'ensemble :
$$\mathrm{Im}(f)=\{\vec{y}\in F \text{ t.q. } \exists\vec{x}\in E,\ \vec{y}=f(\vec{x})\},$$
et le noyau de f est l'ensemble :
$$\mathrm{Ker}(f)=\Big\{\vec{x}\in E \text{ t.q. } f(\vec{x})=\vec{0}_F\Big\}.$$

4. Le lecteur pressé pourra faire l'impasse en première lecture sur cette notion d'image réciproque, qui sera surtout utilisée dans la suite pour définir le noyau d'une application linéaire (cf la remarque V.4.6 plus bas qui donne une définition du noyau sans utiliser cette notion explicitement).

5. de l'allemand *Kern* signifiant noyau. La traduction anglaise de noyau (au sens mathématique) est *kernel*.

Théorème V.4.7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*

i. L'image d'un sous-espace vectoriel de E par f est un sous-espace vectoriel de F.

ii. L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par f est un sous-espace vectoriel de E.

En particulier, le noyau et l'image de f sont des sous-espaces vectoriels (de E et F respectivement).

Démonstration. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors $\vec{0}_E \in G$, donc $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E) \in f(G)$.

Soit maintenant $\vec{u}, \vec{v} \in f(G)$. Par définition de $f(G)$, il existe des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de G tels que $\vec{u} = f(\vec{x})$ et $\vec{v} = f(\vec{y})$. On a

$$\vec{u} + \vec{v} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}).$$

Puisque G est un sous-espace vectoriel de E, $\vec{x} + \vec{y} \in G$ et on déduit de l'égalité précédente $\vec{u} + \vec{v} \in f(G)$.

Si de plus $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda\vec{x} \in G$ et donc

$$\lambda\vec{u} = \lambda f(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) \in f(G),$$

ce qui achève de montrer que $f(G)$ est bien un sous-espace vectoriel de F.

Montrons maintenant le deuxième point. Soit H un sous-espace vectoriel de F. Alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in H$, et donc $\vec{0}_E \in f^{-1}(H)$. De plus, si $\vec{u}, \vec{v} \in f^{-1}(H)$. Alors

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),$$

et puisque $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ sont dans H et H est un sous-espace vectoriel de F, $f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \in H$, ce qui montre que $\vec{u} + \vec{v} \in f^{-1}(H)$.

Enfin, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} \in f^{-1}(H)$, alors $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ est un élément de H puisque $f(\vec{u})$ est un élément de H. Donc $\lambda\vec{u} \in f^{-1}(H)$. On a bien démontré que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Exemple V.4.8. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \text{ t.q. } x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0\Big\}.$$

Alors A est le noyau de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x - 2y).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p équations et n inconnues est le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$: on retrouve ainsi que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple V.4.9. Soit B le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \Big\{(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\Big\}.$$

Alors B est l'image de l'application linéaire $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2).$$

Donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Remarquons que

$$B = \text{vect}\Big((1,1,2), (1,-1,1)\Big).$$

Exercice V.4.10. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ des triplets $(x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_1 - x_3)$ tels que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ et $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(cf solution p. 66).

V.4.c. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Théorème V.4.11. *Soit E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

i. f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

ii. f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

Démonstration. Le point (i) découle immédiatement de la définition de la surjectivité et de celle de l'image d'une application linéaire.

Démontrons (ii).

Supposons f injective. On sait que $\vec{0}_E$ est un élément de $\text{Ker}(f)$. Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$, et donc par injectivité $\vec{x} = \vec{0}_E$. D'où $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

Réciproquement, on suppose $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de E tels que $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$. Alors

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}_F,$$

donc $\vec{x} - \vec{y} \in \text{Ker}(f)$, et, puisque $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_E$. On a bien montré que f était injective. $\square$

Exemple V.4.12. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 2x_3, 4x_3).$$

Alors f est injective. En effet, si $(x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(f)$, on a $x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - x_3 = 4x_3 = 0$, dont on déduit facilement $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

On peut également caractériser l'injectivité ou la surjectivité d'une application par des propriétés de l'image d'une base de l'espace de départ.

Proposition V.4.13. *Soit E et F des espaces vectoriels. On suppose E de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

i. La famille $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ engendre $\operatorname{Im}(f)$. En particulier, l'application f est surjective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de F.

ii. L'application f est injective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille libre.

Démonstration. Montrons seulement le point (i). Nous n'utiliserons le point (ii) que dans l'exercice V.5.17, et laissons au lecteur le soin de le démontrer.

Les vecteurs $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ sont bien dans $\operatorname{Im}(f)$. De plus, un vecteur $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f)$ s'écrit $f(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in E$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \quad \vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n),$$

ce qui montre bien

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)).$$

On en déduit immédiatement :

$$f \text{ surjective} \iff \operatorname{Im}(f) = F \iff \operatorname{vect}(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)) = F,$$

□

V.4.d. Rang d'une application linéaire

On rappelle que le *rang* d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{F}$.

Définition V.4.14. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Le *rang* de f, noté $\operatorname{rg}(f)$, est la dimension de l'image de f. Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}$, le rang de A est le rang de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Remarque V.4.15. D'après le point (i) de la proposition V.4.13, si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est égal au rang de la famille de vecteurs

$$(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)).$$

Il est donc inférieur à la dimension n de E. De même, le rang d'une matrice A est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Exemple V.4.16. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2(x_1 + 2x_2 + x_3) \\ -(x_1 + 2x_2 + x_3) \end{bmatrix}.$$

Alors $f(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 4, -2)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 2, -1)$. Donc

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = 1.$$

Le rang d'une application linéaire et la dimension de son noyau sont liés par le résultat suivant :

Théorème V.4.17 (Théorème du rang)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des espaces vectoriels. Alors*

$$\operatorname{rg}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim E.$$

Démonstration. Soit k la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$, et ℓ la dimension de $\operatorname{Im} f$. On doit montrer

$$\dim E = k + \ell.$$

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_\ell)$ une base de $\operatorname{Im} f$. Il existe donc, pour $j = 1 \ldots \ell$, un vecteur $\vec{w}_j \in E$ tel que $f(\vec{w}_j) = \vec{v}_j$. Montrons que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_\ell)$ est une base de E (ce qui impliquera immédiatement le résultat annoncé).

Montrons d'abord que $\mathcal{B}$ engendre E. Soit $\vec{x} \in E$. Puisque $f(\vec{x}) \in \operatorname{Im} f$ et $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell$ est une base $\operatorname{Im} f$, il existe $(y_1, y_2, \ldots, y_\ell) \in \mathbb{K}^\ell$ tels que

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{v}_1 + \ldots + y_\ell\vec{v}_\ell.$$

On en déduit

$$f(\vec{x}) = y_1 f(\vec{w}_1) + \ldots + y_\ell f(\vec{w}_\ell) = f(y_1\vec{w}_1 + \ldots + y_\ell\vec{w}_\ell),$$

et donc

$$\vec{x} - y_1\vec{w}_1 - \ldots - y_\ell\vec{w}_\ell \in \operatorname{Ker}(f).$$

Il existe donc $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{K}^k$ tels que

$$\vec{x} - y_1\vec{w}_1 - \ldots - y_\ell\vec{w}_\ell = x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_k\vec{u}_k,$$

soit

$$\vec{x} = y_1\vec{w}_1 + \ldots + y_\ell\vec{w}_\ell + x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_k\vec{u}_k.$$

La famille $\mathcal{B}$ engendre bien E.

Montrons maintenant que $\mathcal{B}$ est libre. On suppose que l'on a

$$x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_k\vec{u}_k + y_1\vec{w}_1 + \ldots + y_\ell\vec{w}_\ell = \vec{0}_E \tag{V.10}$$

avec $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell) \in \mathbb{K}^{k+\ell}$. En appliquant f à la ligne précédente et en utilisant que $f(\vec{u}_j) = \vec{0}_F$ pour $j = 1 \ldots k$ et $f(\vec{w}_j) = \vec{v}_j$ pour $j = 1 \ldots \ell$, on obtient

$$y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \ldots + y_\ell\vec{v}_\ell = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$

On en déduit, puisque la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_\ell)$ est libre :

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_\ell = 0.$$

En revenant à (V.10), et en utilisant que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ est libre, on obtient

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{B}$ est libre et termine la preuve du théorème du rang. □

Exemple V.4.18. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4).$$

On veut déterminer le rang de f.

On calcule pour cela la dimension du noyau de f.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker}(f) \iff x_1+x_2 = x_1-x_2 = 2x_1+x_2 = x_3+x_4 = x_3-x_4 = 0.$$

On résout facilement ce système linéaire homogène de 5 équations :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker}(f) \iff x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Le noyau de f est de dimension 0. Par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 4 - 0 = 4.$$

Remarque V.4.19. En dimension finie, on peut souvent utiliser le théorème du rang et des arguments de dimension pour étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application. Reprenons l'application injective f de l'exemple V.4.12 p. 59. Le théorème du rang s'écrit :

$$\operatorname{rg}(f) + \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(f)}_{0} = \underbrace{\dim \mathbb{C}^3}_{3},$$

et donc $\operatorname{rg}(f) = 3$. On en déduit que $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{C}^3$, c'est donc exactement $\mathbb{C}^3$. Donc f est surjective, et par conséquent bijective. On voit ici, comme dans l'exemple V.4.18, que la dimension donne une information gratuite et facilement exploitable.

V.4.e. Retour sur les systèmes linéaires

L'image et le noyau d'une application linéaire s'interprètent en terme de systèmes linéaires. On considère un système linéaire non-homogène à p équations et n inconnues :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \tag{S}$$

et le système linéaire homogène correspondant :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0. \tag{H}$$

On fixe les coefficients a_{ij}. Soit f l'application linéaire $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ de matrice $[a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Alors l'ensemble F des solutions de (H) est le noyau $\operatorname{Ker} f$ de f. Notons G le sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$ formé des $(b_1, \ldots, b_p)$ tel que (S) a au moins une solution. Dire que $(b_1, \ldots, b_p)$ est un élément de G signifie exactement qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_1, \ldots, x_n) = (b_1, \ldots, b_p)$. En d'autres termes, G est l'image de f : c'est en particulier un espace vectoriel.

Si $(b_1, \ldots, b_p) \in G$, le système (S) est compatible. Fixons en une solution $\vec{y}$. Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{\vec{y} + \vec{x}, \quad \vec{x} \in F\}, \tag{V.11}$$

En effet, on voit facilement que $\vec{x}$ est solution de (S) si et seulement si $\vec{x} - \vec{y}$ est solution de (H), ce qui donne exactement (V.11).

Le théorème du rang nous donne la relation suivante :

$$\dim F + \dim G = n.$$

Notons q la dimension de F. L'identité (V.11) signifie que si (S) est compatible, on peut décrire l'ensemble des solutions avec exactement q paramètres. Ce nombre q est par définition indépendant du second membre $(b_1, \ldots, b_p)$ (seule la compatibilité du système dépend de ce second membre). Rappelons (cf chapitre I), que $q = n - p'$, où p' est le nombre de lignes non nulles [6] que l'on obtient lorsque l'on échelonne le système (S) par la méthode du pivot de Gauss. Le théorème du rang implique que p' est exactement la dimension de G, l'image de f.

Exemple V.4.20. Considérons la famille de systèmes, d'inconnues $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 &= b_1 \\ x_1 + x_2 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 &= b_3. \end{aligned}\right. \tag{S}$$

6. C'est à dire autres que $0 = 0$.

Ici $n=2$, $p=3$. Il est facile de voir que le système homogène n'a que la solution nulle $(0,0)$. Donc $F=\{\vec{0}\}$ est de dimension 0. L'espace vectoriel G formé des (b_1,b_2,b_3) tels que (S) est compatible est de dimension $2-0=2$. Lorsque $(b_1,b_2,b_3)\in G$, le système (S) a une unique solution. Il est facile de déterminer G en échelonnant le système (S). Par les opérations $(L_2)\leftarrow(L_2)-(L_1)$, $(L_3)\leftarrow(L_3)-2(L_1)$, puis $(L_3)\leftarrow(L_3)-\frac{3}{2}(L_2)$, on obtient le système équivalent

$$\text{(S')}\qquad \begin{cases} x_1-x_2=b_1\\ \quad 2x_2=b_2-b_1\\ \quad\ \ 0=b_3-\dfrac{3}{2}b_2-\dfrac{1}{2}b_1.\end{cases}$$

On en déduit que $q=0$, $p'=2$ et que (S) est compatible si et seulement si $2b_3-3b_2-b_1=0$, ce qui donne la représentation cartésienne de G :

$$G=\Big\{(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2b_3-3b_2-b_1=0\Big\}.$$

V.5. Isomorphismes

V.5.a. Définition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Définition V.5.1. On appelle *isomorphisme* entre E et F une application linéaire bijective de E dans F. Lorsqu'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes. On appelle *automorphisme* de E un isomorphisme de E dans lui-même. Un automorphisme est donc un endomorphisme bijectif.

Exemple V.5.2. L'application linéaire f de l'exemple V.4.12 est, par la remarque V.4.19 un isomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$, donc un automorphisme de $\mathbb{C}^3$.

Exemple V.5.3. L'identité de E est un automorphisme de E (donc E est isomorphe à lui même).

Le fait que deux espaces vectoriels sont isomorphes signifie qu'ils ont exactement la même structure d'espace vectoriel : ce sont en quelques sortes deux copies du même espace vectoriel.

V.5.b. Application réciproque d'un isomorphisme

Proposition V.5.4. *Soit E et F des espaces vectoriels et f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est une application linéaire (donc un isomorphisme) de F dans E.*

Remarque V.5.5. Il découle de la proposition V.5.4 que la relation "E est isomorphe à F" est symétrique i.e. :

$$E \text{ isomorphe à } F \iff F \text{ isomorphe à } E.$$

Exercice V.5.6. Vérifier que c'est aussi une relation transitive, i.e. :

$$\Big(E \text{ isomorphe à } F \text{ et } F \text{ isomorphe à } G\Big) \Longrightarrow E \text{ isomorphe à } G.$$

Démonstration de la proposition. L'application réciproque d'une application bijective est également bijective. Si f^{-1} est une application linéaire, ce sera donc aussi un isomorphisme. Montrons que f^{-1} est linéaire.

Soit $\vec{x},\vec{y}\in F$. Alors (par définition de l'application réciproque) :

$$f(f^{-1}(\vec{x}+\vec{y}))=\vec{x}+\vec{y}.$$

De plus

$$f\left(f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y})\right)=f\left(f^{-1}(\vec{x})\right)+f\left(f^{-1}(\vec{y})\right)=\vec{x}+\vec{y}.$$

En combinant ces deux lignes, on obtient :

$$f(f^{-1}(\vec{x}+\vec{y}))=f\left(f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y})\right),$$

et donc, par injectivité de f,

$$f^{-1}(\vec{x}+\vec{y})=f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y}).$$

On démontre de même que si $\lambda\in\mathbb{K}$, $f^{-1}(\lambda\vec{x})=\lambda f^{-1}(\vec{x})$. □

Exemple V.5.7. Soit f l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1-x_2).$$

Calculons l'application réciproque de f. Si $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2)=f^{-1}(y_1,y_2)$ est l'unique solution du système

$$y_1=x_1+x_2,\quad y_2=x_1-x_2.$$

On résout ce système :

$$x_1=\frac{y_1+y_2}{2},\quad x_2=\frac{y_1-y_2}{2}.$$

On a donc

$$f^{-1}(y_1,y_1)=\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right).$$

Plus généralement, calculer la réciproque d'un isomorphisme f dans un système de coordonnées revient à résoudre le système de Cramer inhomogène $f(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n)$, d'inconnues $(x_1,\ldots,x_n)$, de second membre $(y_1,\ldots,y_n)$. Cela revient aussi à calculer l'inverse de la matrice de f dans une base donnée (cf plus bas le point de vue matriciel).

On rappelle qu'une application est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque. On peut ainsi montrer qu'une certaine application linéaire est un isomorphisme en donnant son application réciproque :

Exemple V.5.8. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. La rotation de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle θ :

$$R_\theta:(x,y)\mapsto(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$: elle admet pour application réciproque la rotation $R_{-\theta}$.

V.5.c. Condition sur les dimensions

Proposition V.5.9. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F sont de dimension finie.*

i. *Si f est injective,* $\dim E \leq \dim F$.

ii. *Si f est surjective,* $\dim E \geq \dim F$.

iii. *Si f est un isomorphisme,* $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Le point (iii) découle immédiatement des points (i) et (ii).

Si f est injective, le noyau de f est de dimension 0 et le théorème du rang s'écrit $\dim E = \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$. Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, on a $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim F$, et le point (i) en découle.

Supposons maintenant f surjective. Alors $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$, et le théorème du rang s'écrit : $\dim E = \dim F + \dim \mathrm{Ker}(f) \geq \dim F$, ce qui donne le point (ii). □

Remarque V.5.10. Si $\dim F > \dim E$, il n'existe donc aucune application linéaire surjective de E dans F. De même, si $\dim F < \dim E$, il n'existe aucune application linéaire injective de E dans F.

Exemple V.5.11. L'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ définie par

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2-\sqrt{2}x_3, x_1-x_2+x_3-x_4, x_2+3x_4, \pi x_1+e^{\pi}x_2+x_3, x_1-\sqrt{7}x_4)$$

n'est pas surjective. En effet, il n'existe aucune application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$.

La proposition suivante est une application immédiate du théorème du rang et sa démonstration est laissée au lecteur.

Proposition V.5.12. *Soit E et F de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. *f est un isomorphisme.*

ii. *f est injective et* $\dim E = \dim F$.

iii. *f est surjective et* $\dim E = \dim F$.

Exemple V.5.13. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4,\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0\}.$$

Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to F \\ (x_1,x_2,x_3) &\mapsto (x_1+x_2, x_1-x_2, x_3-x_2, x_3+x_2). \end{aligned}$$

L'application est bien définie : on vérifie facilement que $(x_1+x_2, x_1-x_2, x_3-x_2, x_3+x_2)$ est toujours un élément de F. Montrons que f est bijective :

— L'espace vectoriel F est de dimension 3 (c'est le noyau d'une application linéaire de rang 1). Donc $\dim F = \dim \mathbb{R}^3$.

— On vérifie facilement que $\ker f = \{\vec{0}\}$, donc que f est injective.

— Par les deux points précédents et la proposition V.5.12, f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans F.

V.5.d. Matrices inversibles et isomorphismes

Proposition V.5.14. *Soit E et F deux espaces de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. *l'application f est un isomorphisme de E dans F ;*

ii. $\dim E = \dim F$ *et la matrice A est inversible.*

Sous ces conditions, on a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

Démonstration. Supposons que f est un isomorphisme. Par la proposition V.5.9, $\dim E = \dim F$. Notons n leur dimension commune.

Par la formule donnant la matrice de la composée de deux applications linéaires (point (ii) de la proposition V.3.8),

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_n,$$

ce qui montre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible.

Réciproquement, on suppose que $\dim E = \dim F$ et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible. Soit g l'application linéaire de F dans E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ g) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = I_n, \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = I_n, \end{aligned}$$

où $n = \dim E = \dim F$, ce qui montre que $f \circ g$ est l'identité de F et $g \circ f$ est l'identité de E : f est donc bijective, d'application réciproque g.

□

V.5.e. Isomorphisme entre espaces de mêmes dimensions

Le théorème suivant est un résultat simple, mais important sur les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :

Théorème V.5.15. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Si E et F sont isomorphes, $\dim E = \dim F$ par le point (iii) de la proposition V.5.9.

Réciproquement, supposons $\dim E = \dim F$, et notons n leur dimension commune. Soit $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ une base de E, $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)$ une base de F, et f l'unique application linéaire de E dans F telle que

$$f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j, \quad j = 1\ldots n$$

(on rappelle que l'on peut définir une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie en donnant l'image d'une base, cf le corollaire V.1.6). Vérifions que f est injective. Soit $\vec{x}$ un élément de $\mathrm{Ker}(f)$, $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées dans la base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Alors

$$f(\vec{x}) = \vec{0}_F \text{ i.e. } f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n) = \vec{0}_F.$$

En développant le terme de gauche de la dernière égalité par linéarité, et en utilisant que $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$ pour $j = 1 \ldots n$, on obtient

$$x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}_F,$$

et comme la famille $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ est libre,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

On en déduit $\vec{x} = \vec{0}_E$. On a montré $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$, c'est à dire que f est injective. Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(E)$ donc f est surjective. Finalement f est bijective. □

Exemple V.5.16. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et F de l'exemple V.5.13 sont isomorphes car tous les deux de dimension 3. L'application linéaire f de l'exemple V.5.13 donne un isomorphisme explicite.

Exercice V.5.17. Montrer de la même manière que $\dim E \leq \dim F$ si et seulement si il existe une injection de E dans F, ou encore si et seulement si il existe une surjection de F dans E.

(cf correction p. 66).

V.6. Complément : formule de changement de bases

On donne ici une formule générale permettant de changer les bases de la matrice de représentation d'une application linéaire. Pour déduire $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$ de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dans l'exemple de §V.2.d, on a eu besoin :

— des coordonnées des vecteurs de la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$;
— des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Ces informations sont données par les *matrices de passage* d'une base à une autre, que nous allons définir maintenant. La formule de changement de base proprement dite, qui utilise ces matrices de passage, sera vue en §V.6.b. La définition d'une matrice de passage et la formule de changement de base ne sont pas au programme du tronc commun de L1 à l'Institut Galilée, mais il est conseillé aux étudiants voulant poursuivre leurs études en mathématiques d'en connaître au moins l'existence. Elle sera par ailleurs utilisée une fois dans ce cours, au chapitre VI, pour définir le déterminant d'un endomorphisme.

V.6.a. Matrices de passage

Définition V.6.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = (\vec{\tilde{u}}_1, \vec{\tilde{u}}_2, \ldots, \vec{\tilde{u}}_n)$ deux bases de E. La *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$, est la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. En d'autres termes, si l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = [p_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, on a

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \vec{\tilde{u}}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{u}_i.$$

Exemple V.6.2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une autre base de $\mathbb{K}^n$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice $n \times n$ dont le j-ième vecteur colonne est constitué des coordonnées de $\vec{u}_j$. Supposons $n = 3$ et considérons la famille

$$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right).$$

On vérifie facilement que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On obtient sans calcul la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exemple V.6.3. On reprend les notations de l'exemple de l'exemple de V.2.d p.55. Alors, d'après la première étape de cet exemple :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

D'après la deuxième étape :

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition V.6.4. *Sous les hypothèses de la définition précédente, on note*

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

Soit $\vec{x} \in E$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *ses coordonnées dans* $\mathcal{B}$ *et* $\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}$ *ses coordonnées dans* $\widetilde{\mathcal{B}}$. *Alors*

$$X = P\widetilde{X}.$$

Démonstration. On a

$$\vec{\widetilde{x}} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_j \vec{\widetilde{u}}_j = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \widetilde{x}_j \right) \vec{u}_i,$$

et donc

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \widetilde{x}_j,$$

ce qui montre la formule annoncée. □

Avertissement V.6.5. L'appellation "matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$" peut être source de confusion : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ transforme les coordonnées d'un vecteur dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ en celles de ce même vecteur dans $\mathcal{B}$ (et non l'inverse, comme on pourrait s'y attendre).

Le lecteur pourra vérifier que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ est en fait la matrice de représentation, dans la base $\mathcal{B}$, de l'application linéaire qui envoie les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans ceux de $\widetilde{\mathcal{B}}$, ce qui explique son nom :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f), \quad f \in \mathcal{L}(E,E), \quad \forall i = 1\dots n,\ f(\vec{u}_i) = \vec{\widetilde{u}}_i.$$

Corollaire V.6.6. *Toute matrice de passage est inversible. De plus :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \left(\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

Démonstration. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ et Q la matrice de passage de $\widetilde{\mathcal{B}}$ à $\mathcal{B}$. Alors, si $\vec{x} \in E$ a pour coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ et $\widetilde{X}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}$, on a, par la proposition V.6.4 :

$$QX = \widetilde{X} \text{ et } X = P\widetilde{X}.$$

D'où

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, \quad X = PQX.$$

On en déduit que l'application linéaire $X \to PQX$ est l'identité de $\mathbb{K}^n$, c'est à dire :

$$PQ = I_n.$$

□

Exemple V.6.7. On revient à l'exemple de V.2.d. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En d'autres termes,

$$\vec{u}_1 = \vec{\widetilde{u}}_1 \text{ et } \vec{u}_2 = -\vec{\widetilde{u}}_1 + 2\vec{\widetilde{u}}_2,$$

ce que l'on peut vérifier par un calcul direct à l'aide des expressions de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{\widetilde{u}}_1$ et $\vec{\widetilde{u}}_2$.

De même, en calculant l'inverse de la matrice $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}$, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V.6.b. Formule de changement de bases

Théorème V.6.8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ des bases de E, $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ des bases de F. Alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) &= \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \\ &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

Démonstration. Ceci découle de la formule de changement de coordonnées de la proposition V.6.4.

Soit $\vec{x} \in E$, X le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et $\widetilde{X}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{B}}$. Alors, par les propositions V.2.5 (p. 56) et V.6.4, les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans $\mathcal{C}$ sont :

$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \widetilde{X}$$

et les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ sont donc :

$$\widetilde{Y} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} Y = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \widetilde{X}.$$

Or, de nouveau par la proposition V.2.5,

$$\widetilde{Y} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) \widetilde{X}.$$

On a donc :

$$\forall \widetilde{X} \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \widetilde{X} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) \widetilde{X},$$

ce qui montre comme annoncé :

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f).$$

□

Remarque V.6.9. On peut résumer le théorème V.6.8 par le schéma suivant

$$\begin{tikzcd} (E,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)"] & (F,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q^{-1}"] \\ (E,\widetilde{\mathcal{B}}) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)"'] & (F,\widetilde{\mathcal{C}}) \end{tikzcd}$$

où $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$ permet de passer des coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ aux coordonnées dans $\mathcal{B}$, et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}}$ permet de passer des coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ aux coordonnées dans $\mathcal{C}$ (cf proposition V.6.4).

Exemple V.6.10. On revient à l'exemple donné en V.2.d. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

On en déduit, par le théorème V.6.8, puis un calcul simple de produits matriciels :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) &= \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de l'exemple de V.2.d, p.55.

V.7. Correction de quelques exercices

Correction de l'exercice V.1.4

Soit R la distance entre l'origine et M, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre M et de rayon R. Notons $O = (0,0)$ l'origine, $A = f(0,0)$. Par définition d'une rotation, A est le point de $\mathcal{C}$ tel que l'angle $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})$ soit égal à θ. Puisque θ n'est pas congru à 0 modulo 2π, on en déduit que O et A ne sont pas confondus, et donc que $f(0,0) \neq (0,0)$. Par la proposition V.1.3, l'application f n'est pas linéaire .

Correction de l'exercice V.1.8.

On exprime les vecteurs de la base canonique en fonction de $\vec{u} = (1,3)$ et $\vec{v} = (1,4)$. En résolvant deux systèmes linéaires à deux équations et deux inconnues, on obtient :

$$(1,0) = 4\vec{u} - 3\vec{v}, \quad (0,1) = -\vec{u} + \vec{v}.$$

D'où

$$f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) = f\big(x(4\vec{u} - 3\vec{v}) + y(-\vec{u} + \vec{v})\big) = (4x - y)(-1,2,3),$$

où pour la dernière égalité on a utilisé que $f(\vec{u}) = (-1,2,3)$ et $f(\vec{v}) = (0,0,0)$.

Correction de l'exercice V.3.11.

a. Par la proposition V.3.8,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. On a envie de dire que AB est une matrice de représentation de l'application $f \circ g$ (qui est bien définie, comme application application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$). Mais

$$AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g),$$

la base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme l'"espace d'arrivée" de g n'est donc pas la même que la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme "espace de départ" de f. Le produit AB n'a donc pas d'interprétation particulière en terme de composition d'applications linéaires.

Réponses à l'exercice V.4.4. $f^{-1}(]-\infty,0[) = \emptyset$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f^{-1}([0,+\infty[) = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = [0,+\infty[$, $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$, $f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right) = [0,+\infty[$ et $f^{-1}\left(f([0,+\infty[)\right) = \mathbb{R}$.

i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective : $f(1) = 1 = f(-1)$. Elle n'est pas surjective car $f(\mathbb{R}) = [0,+\infty[$.

ii. $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ n'est toujours pas injective (pour la même raison) mais elle est bien surjective.

iii. $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est injective : en effet, si x est positif, $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{f(x)}$, donc x est uniquement déterminé par $f(x)$. Elle n'est pas surjective, car $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$.

iv. En combinant les arguments des points précédents, on montre que f est un bijection de $[0,+\infty[$ sur lui-même. Son application réciproque est $x \mapsto \sqrt{x}$.

Correction de l'exercice V.4.10.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_1 - x_3).$$

Soit

$$G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (c'est le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$). On a

$$A = f(G).$$

Donc A est l'image d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ par l'application linéaire f, ce qui montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice V.5.17.

Soit E et F des espaces vectoriels, de dimensions respectives n et p.

On sait déjà (proposition V.5.9) que s'il existe une application linéaire injective de E dans F ou une application linéaire surjective de F dans E, $n \leq p$. Montrons la réciproque. On note $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E, et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ une base de F. Supposons $n \leq p$.

— Soit f l'application linéaire de E dans F définie par

$$f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j, \quad j = 1 \ldots n.$$

La famille $(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, extraite d'une famille libre, est libre. Par la proposition V.4.13, f est injective.

— Soit g l'application linéaire de F dans E définie par

$$g(\vec{v}_j) = \vec{u}_j, \ j = 1 \ldots n, \qquad g(\vec{v}_j) = \vec{0}, \ j = n+1 \ldots p.$$

La famille $(g(\vec{v}_1), \ldots, g(\vec{v}_n)) = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n, 0, \ldots, 0)$, qui complète la base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est génératrice. Par la proposition V.4.13, f est surjective.

VI. Déterminant

La référence pour ce chapitre est encore le livre de Liret-Martinais [1], dont on suit la présentation générale. On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

VI.1. Définition du déterminant d'une matrice. Exemples

VI.1.a. Définition

Soit $n \geq 1$. Le *déterminant* d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det A$, est un scalaire (un élément de $\mathbb{K}$), défini par récurrence sur n de la manière suivante.

Si $A = [a]$ est une matrice 1×1, $\det A = a$.

Fixons $n \geq 2$ et supposons le déterminant défini pour les matrices $(n-1)\times(n-1)$. Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons, pour $1 \leq i, j \leq n$, $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en retirant à A la i-ème ligne et la j-ième colonne. Alors par définition :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}.$$

Remarquons que $\det A_{i,1}$ est le déterminant d'une matrice $(n-1) \times (n-1)$, qui est donc bien défini par hypothèse de récurrence.

On note parfois

$$\det A = |A|, \quad \det[a_{i,j}]_{1 \leq \substack{i \\ j} \leq n} = |a_{i,j}|_{1 \leq \substack{i \\ j} \leq n}.$$

VI.1.b. Formules pour les petites matrices

On peut facilement calculer le déterminant des matrices 2×2 et 3×3.

Matrice 2×2. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice 2×2. On a donc :

$$A_{1,1} = [d], \quad A_{2,1} = [b], \quad A_{1,2} = [c], \quad A_{2,2} = [a].$$

Par définition du déterminant,

$$\det(A) = a(\det[d]) - c(\det[b])$$

et donc

$$\det(A) = ad - bc.$$

1. François Liret et Dominique Martinais. *Algèbre 1ère année - Cours et exercices avec solutions*. Dunod, deuxième édition, 2003

On retrouve la formule utilisé au chapitre II (cf p. 23) pour étudier l'inversibilité des matrices 2×2.

Matrices 3×3. Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq \substack{i \\ j} \leq 3}$ une matrice 3×3. Par définition du déterminant :

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{2,1} \det A_{2,1} + a_{3,1} \det A_{3,1},$$

Soit, en utilisant la formule pour les déterminants 2×2,

$$\det A = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) - a_{2,1}(a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) + a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}).$$

En développant, on obtient que le déterminant de A vaut :

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

Cette formule peut se retenir avec le schéma suivant (*règle de Sarrus*) :

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}$$

Dans ce schéma, on a mis deux copies de la matrice $[a_{i,j}]$ côte à côte (la 3ème colonne de la deuxième copie, inutile, a été omise). Les flêches représentent un produit de trois facteurs, qui apparaît avec un signe $+$ dans la formule si la flêche est pleine, et un signe $-$ si la flêche est pointillée.

Exercice VI.1.1. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(cf Réponse p. 75)

On peut bien entendu obtenir (par récurrence sur n) une formule exacte du même type pour un déterminant $n \times n$ pour tout entier n. Mentionnons toutefois qu'une telle formule est somme de $n!$ termes, chacun produit de n coefficients de A. Par exemple, pour $n = 20$, il s'agit de faire la somme d'environ $2,4 \times 10^{18}$ produits de 20 nombres. Une telle formule est bien entendu inutilisable, même informatiquement, pour n grand. Nous verrons dans la suite de ce chapitre des méthodes permettant de calculer plus simplement les déterminant. Pour mémoire, la formule générale d'un déterminant $n \times n$ est :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ. Le lecteur n'ayant jamais rencontré les termes *groupe symétrique*, *signature* et *permutation* peut ignorer pour l'instant cette formule, qui ne sera pas utilisée dans la suite.

VI.1.c. Cas des matrices triangulaires supérieures

On renvoie le lecteur à la définition II.3.12, p. 25 des matrices triangulaires supérieures.

Proposition VI.1.2. *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes diagonaux.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la taille n de la matrice. C'est évident pour $n = 1$.

Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour les matrices $(n-1) \times (n-1)$. Soit A une matrice triangulaire supérieure $n \times n$. Alors, par définition du déterminant, puisque $a_{2,1} = a_{3,1} = \ldots = a_{n,1} = 0$,

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1}.$$

Puisque $A_{1,1}$ est un matrice triangulaire supérieure $(n-1) \times (n-1)$, on obtient par hypothèse de récurrence

$$\det A_{1,1} = a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

ce qui donne la formule voulue :

$$\det A = a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

□

Exemple VI.1.3.

$$\det I_n = 1, \quad \det(\lambda I_n) = \lambda^n, \quad \det D_k(\lambda) = \lambda,$$

où $D_k(\lambda)$ est une matrice de dilatation (cf définition II.3.1 p. 24.)

Exemple VI.1.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1+i & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix} = -8i$$

VI.2. Manipulations sur les lignes

On étudie maintenant l'effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes. Ceci nous permettra d'une part de calculer plus facilement les déterminant, et d'autre part de montrer la formule du déterminant d'un produit, qui fait l'objet de la partie VI.3

VI.2.a. Echange de deux lignes

Proposition VI.2.1. *Soit A une matrice carrée $n \times n$, $1 \leq i < k \leq n$, et A' la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes i et k. Alors* $\det(A') = -\det(A)$.

Exemple VI.2.2.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

On obtient cette valeur en échangeant les lignes 1 et 2, et les lignes 3 et 4, puis en utilisant la formule du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

Exemple VI.2.3.

$$\det R_{k\ell} = -1,$$

où $R_{k\ell}$ est la matrice élémentaire donnée par la définition II.3.1 (cette matrice est obtenue à partir de I_n en échangeant les lignes k et ℓ).

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Le résultat est facile pour $n = 2$. Le seul échange de lignes possible est celui des lignes 1 et 2. Or ;

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Soit $n \geq 2$. On suppose la conclusion de la proposition connue pour les matrices $(n-1) \times (n-1)$. Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice $n \times n$. Par définition du déterminant,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1},$$

où, comme auparavant, $A_{i,1}$ est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en retirant la i-ème ligne et la première colonne.

On commence par traiter le cas de l'échange de deux lignes successives : on fixe $i_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$ et on suppose que A' est obtenue à partir de A en échangeant les lignes i_0 et $1 + i_0$. En notant $A' = [a'_{i,n}]$, on a :

$$\det A' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1}. \tag{VI.1}$$

La démonstration repose sur une analyse élémentaire, mais minutieuse, des termes de cette somme, en distinguant plusieurs cas selon les valeurs de i.

Si $i \neq i_0$ et $i \neq 1 + i_0$, $a'_{i,1} = a_{i,1}$, et $A'_{i,1}$ est la matrice obtenue en enlevant la i-ème ligne et la première colonne à A'. On en déduit que si $i > 1 + i_0$, la matrice $A'_{i,1}$ est obtenue à partir de la matrice $A_{i,1}$ en échageant les lignes i_0 et $1 + i_0$. Si $i < i_0$, le retrait de la ligne i a décalé la numérotation des lignes i_0 et $1 + i_0$, et on vérifie que cette fois $A'_{i,1}$ est obtenue à partir de $A_{i,1}$ en échangeant les lignes $i_0 - 1$ et i_0. Dans tous les cas, par hypothèse de récurrence,

$$\det A'_{i,1} = -\det A_{i,1}.$$

Il reste à considérer les indices $i = i_0$ et $i = 1 + i_0$ dans la somme (VI.1). Puisque A' est obtenu à partir de A en échangeant les lignes i_0 et $1 + i_0$, on a :

$$a'_{i_0,1} = a_{1+i_0,1} \text{ et } a'_{1+i_0,1} = a_{i_0,1}.$$

De plus, $A'_{i_0,1}$ est obtenu à partir de A' en retirant la ligne i_0 et la première colonne. En utilisant la définition de A', on voit que $A'_{i_0,1}$ est obtenu à partir de A en retirant la ligne $i_0 + 1$ et la première colonne. De même, $A_{1+i_0,1}$ est obtenu à partir de A en retirant la ligne i_0 et la première colonne. On en déduit :

$$A'_{i_0,1} = A_{1+i_0,1} \text{ et } A'_{1+i_0,1} = A_{i_0,1}.$$

En revenant à la formule (VI.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\det A' = &-\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\notin\{i_0,1+i_0\}}} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}\\ &+ (-1)^{1+i_0} a_{1+i_0,1} \det A_{1+i_0,1} + (-1)^{2+i_0} a_{i_0,1} \det A_{i_0,1}\\ &= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} = -\det A.\end{aligned}$$

Il reste à traiter le cas de l'échange de deux lignes non successives (L_{i_0}) et (L_{k_0}), avec $1 \leq i_0 < k_0 \leq n$. On raisonne pour cela par récurrence sur la distance $k_0 - i_0$ entre ces lignes. Le cas $k_0 - i_0 = 1$ vient d'être traité. Pour traiter le cas $k_0 - i_0 > 1$, on remarque que pour échanger les lignes i_0 et k_0, il suffit de faire les opérations suivantes

— $(L_{1+i_0}) \leftrightarrow (L_{k_0})$, échange de deux lignes de distance $k_0 - 1 - i_0$, qui multiplie le déterminant par -1 par hypothèse de récurrence.
— $(L_{i_0}) \leftrightarrow (L_{1+i_0})$, échange de deux lignes successives, qui multiplie le déterminant par -1) par le calcul précédent.
— $(L_{1+i_0}) \leftrightarrow (L_{k_0})$, échange de deux lignes de distance $k_0 - 1 - i_0$, qui multiplie le déterminant par -1 par hypothèse de récurrence.

Finalement, on a montré qu'en échangeant les lignes i_0 et k_0, on a multiplié le déterminant par -1, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire VI.2.4. *Soit A une matrice ayant deux lignes identiques. Alors* $\det A = 0$.

Démonstration. En échangeant les deux lignes en question, on obtient, par la proposition précédente :

$$\det A = -\det A,$$

ce qui montre que $\det A = 0$. □

VI.2.b. Linéarité par rapport à une ligne

Proposition VI.2.5. *Soit A, B, C trois matrices $n \times n$ et $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. On suppose :*
— *si $i \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq i_0$, les i-èmes lignes de A, B et C sont identiques ;*
— *la ligne i_0 de A est la somme des lignes i_0 de B et de C.*

Alors

$$\det A = \det B + \det C.$$

Exemple VI.2.6.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}.$$

Démonstration. On raisonne de nouveau par récurrence sur la dimension n des matrices. Le résultat est évident pour $n = 1$.

On fixe un entier $n \geq 2$. On suppose le résultat vrai pour les matrices $(n-1) \times (n-1)$. On se donne trois matrices $n \times n$, $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ et $C = [c_{i,j}]$ qui vérifient les hypothèses de la proposition. Quitte à échanger les lignes 1 et i_0 de A, B et C (cf proposition VI.2.1), on peut supposer $i_0 = 1$. On a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}.$$

Si $i \geq 2$, $a_{i,1} = b_{i,1} = c_{i,1}$. De plus, par hypothèse de récurrence,

$$\det A_{i,1} = \det B_{i,1} + \det C_{i,1}.$$

Par ailleurs $A_{1,1} = B_{1,1} = C_{1,1}$, et $a_{1,1} = b_{1,1} + c_{1,1}$. Donc dans les deux cas ($i \geq 2$ et $i = 1$) :

$$a_{i,1} \det A_{i,1} = b_{i,1} \det B_{i,1} + c_{i,1} \det C_{i,1}.$$

On en déduit

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (b_{i,1} \det B_{i,1} + c_{i,1} \det C_{i,1}) = \det B + \det C.$$

□

Par un raisonnement analogue, on montre

Proposition VI.2.7. *Soit A et B des matrices $n \times n$, $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que B est obtenue à partir de A en multipliant par λ la ligne i_0. Alors*

$$\det B = \lambda \det A.$$

Exemple VI.2.8. Si A est une matrice $n \times n$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Remarque VI.2.9. Fixons $1 \leq i_0 \leq n$ et des vecteurs lignes (des éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$) $(L_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}}$, et considérons l'application f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui a $(x_1, \dots, x_n)$ associe le déterminant de la matrice de lignes $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$, où (L_{i_0}) est la matrice ligne $[x_1 \dots x_n]$. Les propositions VI.2.5 et VI.2.7 signifient exactement que f est linéaire. On dit que le déterminant est *linéaire par rapport à une ligne*, où encore que l'application qui à n vecteurs lignes associe le déterminant correspondant est n-linéaire ou multilinéaire. Par exemple, l'application

$$g : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ (*exercice* : calculer $g(x_1, x_2, x_3)$ et vérifier que c'est bien une application linéaire).

Donnons maintenant deux conséquences importantes des Propositions VI.2.5 et VI.2.7.

Corollaire VI.2.10. *Soit A une matrice carrée ayant une ligne nulle. Alors* $\det A = 0$.

Démonstration. En effet, on obtient A à partir de A en multipliant par 0 la ligne nulle. La proposition VI.2.7 donne donc :

$$\det A = 0 \det A = 0.$$

□

Corollaire VI.2.11. *Soit A et A' deux matrices $n \times n$, et $i, k \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq k$. On suppose que A' est obtenue à partir de A par le remplacement $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_k)$. Alors* $\det(A) = \det(A')$.

Démonstration. En effet, par les propositions VI.2.5 et VI.2.7,

$$\det A' = \det A + \lambda \det B,$$

où B est la matrice dont toutes les lignes sont égales à celle de A, sauf la i-ème ligne qui est égale à la k-ième ligne de A. Par le corollaire VI.2.4, $\det B = 0$, ce qui conclut la preuve. □

Exemple VI.2.12. Le déterminant d'une matrice de transvection $T_{k\ell}(\lambda)$ est 1. En effet $T_{k\ell}(\lambda) = T_{k\ell}(\lambda)I_n$ est obtenu à partir de I_n par le cadrage $(L_k) \leftarrow (L_k) + \lambda(L_\ell)$, et le résultat découle du Corollaire VI.2.11.

Pour résumer, on a déterminé l'effet sur un déterminant des opérations élémentaires sur les lignes : la multiplication d'une ligne par un scalaire multiplie le déterminant par ce même scalaire, l'échange de deux lignes multiplie le déterminant par -1, et un remplacement ne change pas le déterminant. Puisqu'on connaît le déterminant d'une matrice échelonnée (une telle matrice est triangulaire supérieure), on peut utiliser la phase de descente de la méthode du pivot de Gauss du chapitre I pour calculer un déterminant.

Exercice VI.2.13. Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & 14 \end{vmatrix}$$

(cf réponse p. 75).

VI.3. Déterminant, produit de matrices et matrices inversibles

L'objet de cette partie est de montrer deux théorèmes fondamentaux sur le déterminant d'un produit de matrices et sur la caractérisation des matrices inversibles par le déterminant, et de donner quelques applications.

VI.3.a. Résultats principaux

Théorème VI.3.1. *Soit A et B deux matrices $n \times n$. Alors*

$$\det(AB) = \det A \times \det B.$$

Théorème VI.3.2. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Preuve des théorèmes VI.3.1 et VI.3.2. La stratégie de la preuve est simple : lorsque A est une matrice élémentaire, la multiplication par A se réduit à une opération sur les lignes, et la formule du déterminant de AB se ramène aux résultats que l'on vient de démontrer dans la section VI.2. On utilise ensuite que toute matrice est produit de matrices élémentaires et d'une matrice échelonnée réduite pour montrer les deux théorèmes dans le cadre général.

Etape 1. Multiplication par une matrice élémentaire. On montre ici que la formule $\det(AB) = \det A \times \det B$ est valable lorsque A est une matrice élémentaire (cf §II.3.a pour la définition de ces matrices et les notations $D_k(\lambda)$, $T_{k\ell}(\lambda)$, $R_{k\ell}$).

Si A est une matrice de dilatation $D_k(\lambda)$, on a $\det A = \lambda$. De plus, AB est obtenu à partir de B en multipliant sa k-ième ligne par λ. On a donc, par la proposition VI.2.7, $\det(AB) = \lambda \det B = (\det A)(\det B)$.

Si A est une matrice de transvection, $\det(A) = 1$ (cf Exemple VI.2.12). Par ailleurs, AB est obtenu à partir de B par un remplacement. Par le corollaire VI.2.11, $\det(AB) = \det B = (\det A)(\det B)$.

Enfin, si A est un matrice de transposition $R_{k,\ell}$, on a $\det(A) = -1$ (cf exemple VI.2.3) et, par la proposition VI.2.1, $\det(AB) = -\det B = (\det A)(\det B)$.

Etape 2. On montre le théorème VI.3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par la méthode du pivot de Gauss appliquée aux matrices (cf la partie II.3, p.23),

$$E_k \dots E_1 A = A',$$

où les E_j sont des matrices élémentaires, et A' est une matrice échelonnée réduite. Par l'étape 1, et une récurrence élémentaire

$$\det(E_k) \dots \det(E_1) \det(A) = \det(A'). \tag{VI.2}$$

On rappelle que toutes les matrices élémentaires sont inversibles, et que les déterminants des matrices élémentaires, calculés plus hauts, sont tous non nuls. Par ailleurs la seule matrice échelonnée réduite $n \times n$ inversible est la matrice I_n, et toute autre matrice échelonnée réduite a au moins une ligne nulle (cf Théorème II.3.16, p. 25, du chapitre sur les matrices).

On distingue deux cas. Si A est inversible, A' doit être inversible (c'est le produit de matrice inversible), et donc $A' = I_n$. La formule (VI.2) se lit $\det(E_k) \dots \det(E_1) \det(A) = 1$, ce qui montre que le déterminant de A est non nulle.

Si A est non-inversible, alors A' ne l'est pas non plus : sinon A pourrait s'écrire comme produit des matrices élémentaires $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$ (inversibles) et de la matrice inversible A', et serait donc aussi inversible. Puisque A' est échelonnée réduite, on en déduit que A' a une ligne nulle. Par le Corollaire VI.2.10, $\det A' = 0$. Par la formule VI.2, puisque tous les déterminants $\det(E_j)$ sont non nuls, on en déduit $\det A = 0$. Le théorème VI.3.2 est démontré.

Etape 3. Fin de la preuve du théorème VI.3.1. On suppose maintenant que A et B sont des matrices $n \times n$ quelconques. On veut montrer $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. On distingue deux cas :

— Si A est non inversible, AB ne l'est pas non plus (sinon A serait inversible, d'inverse $B(AB)^{-1}$, par la formule $AB(AB)^{-1} = I_n$). Par l'étape 2, $\det(A) = 0$ et $\det(AB) = 0$, ce qui montre la formule $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ dans ce cas.

— Si A est inversible, on sait que A est produit de matrices élémentaires : avec les notations de l'étape 2, $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$. Par l'étape 1 et une récurrence immédiate
$$\det(AB) = \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}) \det(B)$$
et
$$\det A = \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}),$$
ce qui donne à nouveau $\det(AB) = \det A \times \det B$, concluant la preuve du théorème VI.3.1.

□

Remarquons que si A est inversible, on a

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}),$$

et donc

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Exercice VI.3.3. A quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ le système suivant est-il un système de Cramer ?

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

(cf correction p. 75).

VI.3.b. Déterminant d'une transposée

Proposition VI.3.4. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors*

$$\det A = \det {}^t A.$$

Démonstration. Si A n'est pas inversible, ${}^tA$ ne l'est pas non plus, et donc, par le théorème VI.3.2, $\det A = 0 = \det {}^tA$.

Si A est inversible, A est produit de matrice élémentaire. D'après le théorème VI.3.1, il suffit donc de montrer la formule $\det A = \det {}^tA$ lorsque A est une matrice élémentaire. Or :

$${}^tD_k(\lambda) = D_k(\lambda), \quad {}^tT_{k\ell}(\lambda) = T_{\ell k}(\lambda), \quad {}^tR_{k\ell} = R_{k\ell},$$

ce montre le résultat désiré (rappelons que toutes les matrices de transvection sont de déterminant 1). □

Dans tout les résultats qui précèdent, on peut donc remplacer "ligne" par "colonne". On peut par exemple calculer un déterminant en faisant des manipulations élémentaires sur les colonnes. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est nulle ou deux colonnes égales vaut zéro, etc...

VI.3.c. Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne

Proposition VI.3.5. *Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j}$ une matrice $n \times n$. Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Alors :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}. \tag{VI.3}$$

De même, si $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}. \tag{VI.4}$$

Dans le cas (VI.3), on dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la j-ième colonne. Dans le cas (VI.4), qu'on l'a développé par rapport à la i-ème ligne.

Démonstration. On commence par montrer la formule (VI.3). Lorsque $j = 1$, cette formule est exactement la définition du déterminant. Si $j \geq 2$, on se ramène au cas $j = 1$, en remplaçant la matrice A par la matrice $A' = [a'_{i,j}]_{i,j}$ obtenue à partir de A en mettant la j-ième colonne de A en premier, et donc en décalant les colonnes 1, 2,..., $j-1$ d'un rang vers la droite. En notant $(C_k)_{k=1\ldots n}$ les colonnes de A et $(C'_k)_{k=1\ldots n}$ les colonnes de A', on a donc :

$$\begin{gathered}(C'_1) = (C_j)\\ (C'_2) = (C_1), \ldots, (C'_j) = (C_{j-1})\\ (C'_{j+1}) = (C_{j+1}), \ldots, (C'_n) = (C_n).\end{gathered}$$

La matrice A' est obtenue à partir de A par $j-1$ échanges de colonnes : on échange les colonnes j et $j-1$, puis $j-1$ et $j-2$, etc... jusqu'aux colonnes 2 et 1. Le déterminant de A' est donc égal au déterminant de A multiplié par $(-1)^{j-1}$. On déduit alors la formule (VI.3) de la définition du déterminant de A' :

$$\det A' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1},$$

en remarquant que, par définition de A',

$$a_{i,j} = a'_{i,1} \text{ et } A_{i,j} = A'_{i,1}.$$

□

La formule précédente peut s'avérer très utile pour calculer un déterminant : on choisit la ligne ou la colonne qui a le plus de zéro, puis on développe par rapport à cette ligne pour réduire la taille du déterminant.

Exemple VI.3.6.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times (-4) + 2 \times 14 = 40,$$

en calculant les déterminants 3×3 par la règle de Sarrus.

VI.4. Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, f un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Rappelons que f est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $n \times n$ $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, *matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$*, dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Lemme VI.4.1. *Le déterminant de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E.*

Définition VI.4.2. La valeur commune de tous ces déterminants est appelée le déterminant de l'endomorphisme f est noté $\det(f)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Par la formule de changement de base (cf §V.6),

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P,$$

où P est une matrice inversible $n \times n$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On en déduit, par le théorème VI.3.1 sur le déterminant d'un produit de matrices :

$$\begin{aligned}\det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \det\left(P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P\right) &= \det(P^{-1}) \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det P \\ &= \frac{1}{\det(P)} \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det P.\end{aligned}$$

On a bien montré :

$$\det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)).$$

□

Exercice VI.4.3. Calculer le déterminant de la rotation R_θ de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle θ. (Correction p. 75).

Exercice VI.4.4. Soit $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (2,0,1)$. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e_1) = (2,2,0)$, $f(e_2) = (1,2,1)$, $f(e_3) = (2,1,2)$. Exprimer la matrice de f dans cette base, puis calculer le déterminant de f. (Correction p. 75).

Réponse à quelques exercices

Exercice VI.1.1. . Le premier déterminant vaut 2, le deuxième -4 et le troisième 14.

Exercice VI.2.13. Par les remplacements $(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) + (L_1)$ et $(L_4) - 3(L_1)$, qui ne changent pas le déterminant d'après le corollaire VI.2.11, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

(Pour la deuxième égalité on a utilisé que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes diagonaux).

Exercice VI.3.3.

La matrice des coefficients du système est :

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On sait que le système est un système de Cramer si et seulement si cette matrice est inversible. De plus, cette condition est équivalente à la condition $\det(A_\lambda) \neq 0$. Par un calcule direct (par exemple à l'aide de la règle de Sarrus), on obtient

$$\det(A_\lambda) = 4 - 4\lambda.$$

Le système est donc un système de Cramer si et seulement si $\lambda \neq 1$.

Exercice VI.4.3.

En utilisant les coordonnées polaires du plan complexe, on voit que R_θ correspond à l'application qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $e^{i\theta}z = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$. On en déduit la formule

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

La matrice de R_θ dans la base canonique est donc :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de R_θ est donc $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Exercice VI.4.4.

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

On vérifie facilement :

$$f(e_1) = 2e_1, \quad f(e_2) = e_1 + e_2, \quad f(e_3) = e_2 + e_3.$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de f est égal au déterminant de cette matrice triangulaire supérieure, soit le produit de ses termes diagonaux, qui vaut 2.

Table des matières