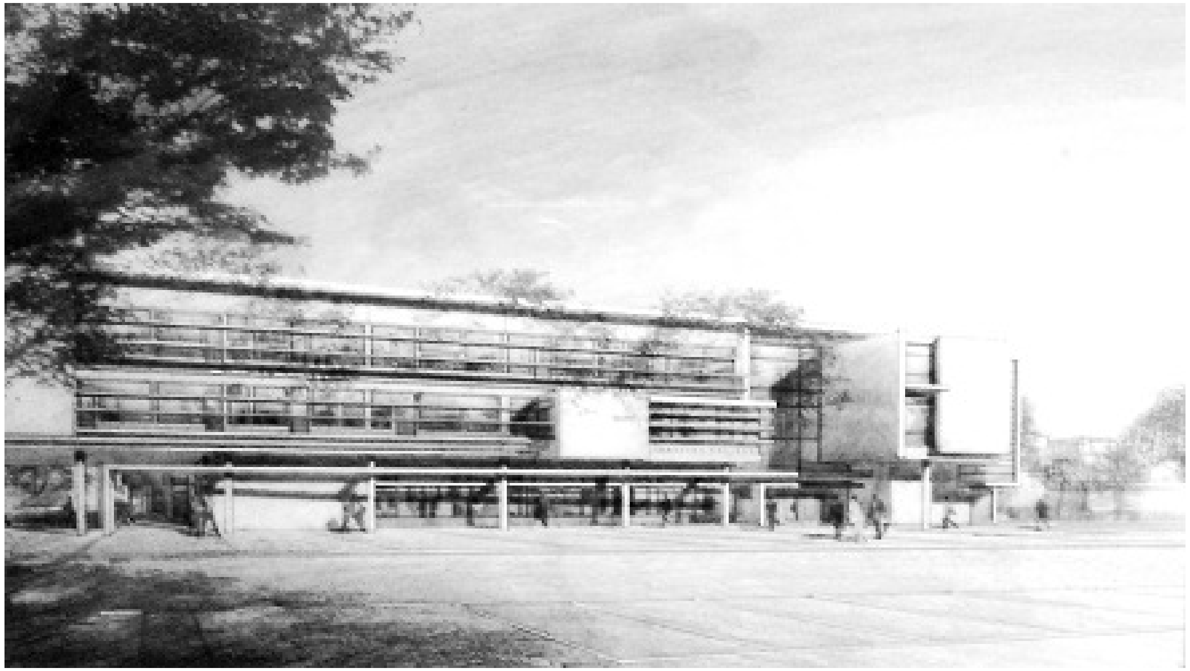
Institut Galilée

Sciences et technologies



Licence 1$^{\text{ère}}$ année. Deuxième semestre 2016/2017

Algèbre linéaire et algorithmique
2ème partie

V. Espaces vectoriels

Comme dans les chapitres précédents, on fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *nombres*, ou *scalaires*.

V.1. Définitions et exemples

V.1.a. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Soit $n \geq 1$ un entier. On rappelle que $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des $n-$uplets $(x_1, \ldots, x_n) = (x_j)_{j=1\ldots n}$, avec $x_j \in \mathbb{K}$ pour tout n. Un élément $\vec{x}$ de $\mathbb{K}^n$ est appelé *vecteur*. Les vecteurs seront toujours notés avec une flèche pour les différencier des éléments de $\mathbb{K}$ (les scalaires) notés sans flèche : ainsi $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ seront des vecteurs, x, y, λ, μ, x_1, x_2 des scalaires. Les lettres grecques (λ, μ, ν etc...) désigneront systématiquement des scalaires (cf l'alphabet grec à la fin du tome I).

On considère sur $\mathbb{K}^n$ les deux opérations suivantes :

Addition : soit $\vec{x} = (x_j)_{j=1\ldots n}$ et $\vec{y} = (y_j)_{j=1\ldots n}$ des vecteurs. Leur somme $\vec{x}+\vec{y}$ est par définition le vecteur $(x_j + y_j)_{j=1\ldots n}$.

Multiplication par un scalaire : si λ est un scalaire et $\vec{x} = (x_j)_{j=1\ldots n}$ un vecteur, leur *produit* est par définition le vecteur $(\lambda x_j)_{j=1\ldots n}$.

Exemples V.1.1.

$$i(i, -1, 2) + (1, i, 4i) = (0, 0, 6i), \quad (k)_{k=1\ldots 10} + (-j+1)_{j=1\ldots 10} = \underbrace{(1, 1, 1, \ldots, 1)}_{10 \text{ fois}}.$$

Avertissement V.1.2. On a défini le produit d'un scalaire par un vecteur, et pas le produit de deux vecteurs.

L'addition et multiplication par un scalaire vérifient les règles de calcul suivantes :

i. *Associativité de l'addition* : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \quad (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (on notera $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ leur valeur commune).

ii. *Commutativité de l'addition* : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \quad \vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$.

iii. *Associativité de la multiplication* : Pour tous scalaires λ et μ, pour tout vecteur $\vec{x}$, $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$.

iv. *Distributivité* : Pour tous scalaires λ et μ, pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$ et $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$.

v. Pour tout vecteur $\vec{x}$, $1\vec{x} = \vec{x}$.

On note $\vec{0}$ le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles :

$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0).$$

On a :

$$\forall \lambda,\ \lambda\vec{0} = \vec{0}, \quad \forall \vec{x},\ 0\vec{x} = \vec{0}. \tag{V.1}$$

Soit $\vec{x} = (x_j)_{j=1\ldots n} \in \mathbb{K}^n$. On note $-\vec{x}$ le vecteur $(-x_1, \ldots, -x_n)$. C'est l'unique vecteur $\vec{x}'$ tel que $\vec{x}+\vec{x}' = \vec{0}$. On notera $\vec{x}-\vec{y} = \vec{x}+(-\vec{y})$ la *différence* de deux vecteurs.

La multiplication par un scalaire a la propriété de régularité suivante :

Proposition V.1.3. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Alors*

$$\lambda\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}).$$

Démonstration. Supposons $\lambda\vec{x} = \vec{0}$ et $\lambda \neq 0$. En multipliant l'égalité par $1/\lambda$ et en utilisant la propriété d'associativité (iii), ainsi que (V.1), on obtient $\vec{x} = \vec{0}$, ce qui conclut la preuve. □

V.1.b. Espaces vectoriels généraux

On commence par donner, pour mémoire, la définition générale d'un espace vectoriel. Conformément au programme, cette définition ne sera jamais utilisée directement dans ce cours.

Définition V.1.4. On appelle $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* tout ensemble E muni d'une addition $E \times E \to E$ et d'une multiplication par un scalaire $\mathbb{K} \times E \to E$ qui vérifient les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) et (v) ci-dessus, et tel qu'il existe $\vec{0} \in E$ vérifiant (V.1).

Tout sous-ensemble E de $\mathbb{K}^n$ vérifiant :

$$\vec{0} \in E \tag{V.2}$$

$$\vec{x} \in E \text{ et } \vec{y} \in E \Longrightarrow \vec{x}+\vec{y} \in E \tag{V.3}$$

$$\vec{x} \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda\vec{x} \in E \tag{V.4}$$

est un espace vectoriel : les propriétés (i), (ii), (iii), (iv), (v) et (V.1), vraies sur $\mathbb{K}^n$, le sont automatiquement sur E. Dans ce cours, conformément au programme de L1 de l'institut Galilée, nous considérerons seulement ces exemples d'espaces vectoriels. Nous adopterons donc comme définition d'un espace vectoriel :

Définition V.1.5. Dans toute la suite de ce cours, on appellera $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* tout ensemble E inclus dans $\mathbb{K}^n$ pour un certain $n \geq 1$ et vérifiant les propriétés (V.2), (V.3) et (V.4).

La plupart des propriétés présentées dans la suite du cours sont en fait valables pour les espaces vectoriels généraux de la définition V.1.4 (nous le préciserons dans le cas contraire). Il existe bien entendu des exemples d'espaces vectoriels au sens de la définition V.1.4 qui ne rentrent pas dans le cadre de la définition V.1.5 : l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ (cf chapitre **??**), et l'ensemble des matrices $p \times n$ sur $\mathbb{K}$ en sont deux exemples simples. Remarquons qu'il est facile d'identifier $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{pn}$: l'addition et la multiplication par un scalaire définies sur les matrices correspondent exactement aux opérations de $\mathbb{K}^{pn}$ définies en V.1.a. L'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$, en revanche, est de nature différente [1] et ne rentre pas dans le cadre de la définition V.1.5.

V.1.c. Exemples

Exemple V.1.6. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. L'ensemble des solutions $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de l'équation
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$
est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple V.1.7. L'ensemble $\{(\lambda, \mu, \lambda+\mu),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

V.2. Sous-espace vectoriels

On fixe un $\mathbb{K}$-vectoriel E.

V.2.a. Deux définitions équivalentes

Proposition V.2.1. *Soit F un sous-ensemble de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

ii. Les trois propriétés suivantes sont vérifiées :
- $\vec{0} \in F$;
- $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2 \Longrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$;
- $(\vec{x} \in F, \lambda \in \mathbb{K}) \Longrightarrow \lambda\vec{x} \in F$.

Définition V.2.2. Un ensemble F vérifiant les propriétés de la proposition V.2.1 est appelé *sous-espace vectoriel* de E.

Remarque V.2.3. La définition donnée par le point (ii) de la proposition est la plus pratique pour montrer qu'un certain sous-ensemble d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel.

1. il est de dimension infinie, cf §V.4 pour la définition de la dimension.

Preuve de la proposition. Cela découle immédiatement de la définition V.1.5 d'un espace vectoriel adoptée dans ce cours. La proposition reste vraie en utilisant la définition générale d'un espace vectoriel (définition V.1.4) : la démonstration est élémentaire mais un petit peu plus longue. □

Exemple V.2.4. Les espaces vectoriels étudiés dans ce cours (définition V.1.5) sont exactement les sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$.

Exemple V.2.5. Les ensembles $\{\vec{0}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés *sous-espace vectoriels triviaux* de E.

Exemple V.2.6. Si E est un espace vectoriel, et $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, l'ensemble
$$\{\lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$
est un sous-espace vectoriel de E, appelée *droite* (vectorielle) de E. Dans le cas où E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ces ensembles sont exactement les droites du plan ou de l'espace *passant par l'origine*.

Exemple V.2.7. L'ensemble $\{(\lambda, \lambda, 2\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\{(\lambda, \mu, \lambda+\mu),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\}$ introduit dans l'exemple V.1.7.

Exercice V.2.8. Soit E l'espace vectoriel
$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\ :\ x_1 + x_2 = 0\}.$$
Parmi ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?
$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\ :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\},\\ F_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\ :\ x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0\},\\ F_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\ :\ x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_1 + x_3 = 1\}.\end{aligned}$$
(cf correction p. 53).

Définition V.2.9. On appelle *combinaison linéaire* de $\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_n$ un vecteur de E de la forme $\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalairess.

Proposition V.2.10. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors toute combinaison linéaire d'éléments de F est un élément de F.*

Démonstration. C'est immédiat, par récurrence sur le nombre de termes de la combinaison linéaire. □

V.2.b. Intersection

Proposition V.2.11. *Soit F et G des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. C'est immédiat.

Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in G$ et donc $\vec{0} \in F \cap G$. De même, si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des vecteurs de $F \cap G$, ce sont des vecteurs de F, donc $\vec{x} + \vec{y} \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel de E), et des vecteurs de G, donc $\vec{x} + \vec{y} \in G$ (car G est un sous-espace vectoriel de E). Par suite $\vec{x} + \vec{y} \in F \cap G$. La preuve de $(\vec{x} \in F \cap G,\, \lambda \in \mathbb{K}) \Longrightarrow \lambda\vec{x} \in F \cap G$ est identique. □

Exemple V.2.12. L'intersection des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$

$$F = \{(0, x_2, x_3),\ (x_2, x_3) \in \mathbb{C}^2\} \text{ et } G = \{(x_1, x_2, 0),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$:

$$F \cap G = \{(0, z, 0),\ z \in \mathbb{C}\}.$$

Proposition V.2.13. *Soit F_1, …, F_n des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Par récurrence sur n, à partir de la proposition V.2.11. □

Donnons un exemple fondamental :

Exemple V.2.14. Soit (H) un système linéaire *homogène* :

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = 0. \end{cases}$$

alors l'ensemble F des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. En effet, notons, pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, F_i l'ensemble des solutions de l'équation $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0$. Par l'exemple V.1.6, c'est un sous-espace vectoriel de E. Par la proposition V.2.13, $F = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

On peut aussi montrer directement que F est un sous-espace vectoriel de E, en revenant à la définition d'un sous-espace vectoriel.

Avertissement V.2.15. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la réunion $F \cup G$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, la réunion des sous-espaces vectoriels $\{(x_1, 0),\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: elle contient les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ mais pas leur somme $(1, 1)$. Un résultat plus précis est donné par la proposition suivante.

Proposition V.2.16. *Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

Démonstration. Supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Il existe alors un vecteur $\vec{x}$ qui est dans F, mais pas dans G, et un vecteur $\vec{y}$ qui est dans G, mais pas dans F. Alors $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont tous les deux dans $F \cup G$. Mais $\vec{x} + \vec{y} \notin F$ (sinon on aurait $\vec{y} = \vec{y} + \vec{x} - \vec{x} \in F$) et $\vec{x} + \vec{y} \notin G$ (sinon on aurait $\vec{x} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{y} \in G$. Donc $\vec{x} + \vec{y} \notin F \cup G$, ce qui montre que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. □

V.2.c. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

On donne maintenant un exemple important de sous-espace vectoriel. Soit $n \geq 1$ et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E (on dit aussi que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une famille de vecteurs de E, cf section V.3 plus bas).

Proposition V.2.17. *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ de E :*

$$\left\{\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, appelé espace vectoriel engendré par $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ *et noté*

$$\operatorname{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \ \textit{ou}\ \operatorname{vect}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}.$$

Démonstration. Notons F cet ensemble. On a $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + \ldots + 0\vec{u}_n \in F$. Il est également très simple de vérifier que F est stable par addition et multiplication par un scalaire, ce qui montre le résultat. □

Exemple V.2.18.

$$\operatorname{vect}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}.$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul de E, $\operatorname{vect}(\vec{u})$ est la droite engendrée par $\vec{u}$ (cf exemple V.2.6).

Exemple V.2.19. Soit $\vec{u} = (1, 0, 1)$ et $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ $\operatorname{vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est

$$\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda, \mu, \lambda + \mu),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

C'est exactement le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ vu dans l'exemple V.1.7.

L'espace vectoriel engendré par $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est le plus petit espace vectoriel qui contient $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$:

Proposition V.2.20. *Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ des vecteurs d'un espace vectoriel E, et F un sous-espace vectoriel de E tel que*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \vec{u}_j \in F.$$

Alors $\operatorname{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \subset F$.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E qui contient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Par la proposition V.2.10, toute combinaison linéaire d'éléments de F est dans F. Donc

$$\operatorname{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \subset F.$$

□

V.2.d. Somme, somme directe, supplémentaires

Somme de deux sous-espaces vectoriels

La démonstration (facile) de la proposition suivante est laissée au lecteur :

Proposition V.2.21. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ensemble $H = \{\vec{x} + \vec{y},\ \vec{x} \in F,\ \vec{y} \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition V.2.22. Le sous-espace vectoriel H de la proposition précédente est noté $F + G$ et appelé *somme* de F et G.

Exemple V.2.23. Soit $F = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1 = 0\}$ et $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_3 = 0\}$. Alors

$$F + G = \mathbb{R}^3.$$

En effet, si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(0, x_2, x_3)}_{\in F} + \underbrace{(x_1, 0, 0)}_{\in G},$$

et donc $\vec{x} \in F + G$.

Exemple V.2.24. Soit $n, p \geq 1$ et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ des vecteurs de E. Alors

$$\operatorname{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) + \operatorname{vect}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p) = \operatorname{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p).$$

En effet, notons F l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_j$ et G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}_j$. Par définition, $F + G$ est l'ensemble des $\vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$. En utilisant la définition d'un espace vectoriel engendré, on obtient :

$$F + G = \left\{\lambda_1 \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n + \mu_1 \vec{v}_1 + \ldots + \mu_p \vec{v}_p,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p}\right\}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Exemple V.2.25. La somme des droites de $\mathbb{R}^3$, $\{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$ est le plan de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, 0),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Ceci découle immédiatement de la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. C'est aussi un cas particulier de l'exemple précédent (avec $n = p = 1$, $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$).

Somme directe

Définition V.2.26. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que la somme de F et G est *directe* quand tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique $\vec{x} + \vec{u}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{u} \in G$. En d'autres termes :

$$\left(\vec{x} + \vec{u} = \vec{y} + \vec{v},\ (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2 \text{ et } (\vec{u}, \vec{v}) \in G^2\right) \Longrightarrow \left(\vec{x} = \vec{y} \text{ et } \vec{u} = \vec{v}\right).$$

On note alors $F \oplus G$ la somme de F et G.

Proposition V.2.27. *La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.*

Démonstration. Supposons que la somme est directe. Soit $\vec{x} \in F \cap G$. Alors

$$\underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{\vec{x}}_{\in G},$$

et par unicité de la décomposition d'un vecteur comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, on obtient $\vec{x} = \vec{0}$. D'où $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Supposons maintenant $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des vecteurs de F, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de G. On suppose

$$\vec{x} + \vec{u} = \vec{y} + \vec{v}.$$

Alors

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{v} - \vec{u}.$$

Donc $\vec{x} - \vec{y} = \vec{v} - \vec{u} \in F \cap G$ (car $\vec{x} - \vec{y} \in F$ et $\vec{v} - \vec{u} \in G$). Puisque $F \cap G = \{\vec{0}\}$, on en déduit $\vec{x} = \vec{y}$ et $\vec{u} = \vec{v}$, ce qui termine la preuve. □

Exemple V.2.28. La somme $F + G$ de l'exemple V.2.23 n'est pas directe. En effet, on voit facilement que

$$F \cap G = \{(x_1, x_2, x_3),\ \text{t.q. } x_1 = 0 \text{ et } x_3 = 0\} = \operatorname{vect}\left\{(0, 1, 0)\right\} \neq (\vec{0}).$$

Exemple V.2.29. La somme des droites de $\mathbb{R}^3$, $\{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$ est directe. Le seul point commun à ces droites est bien l'origine $\{\vec{0}\}$.

Supplémentaires

Définition V.2.30. On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont *supplémentaires dans E* lorsque

$$E = F \oplus G.$$

En d'autres termes, la somme de F et G est directe, et égale à E.

Donc par définition, F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément $\vec{z}$ de E s'écrit *de manière unique* $\vec{z} = \vec{x} + \vec{u}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{u} \in G$.

Exemple V.2.31. Les droites $\operatorname{vect}\{(1, 0)\}$ et $\operatorname{vect}\{(0, 1)\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple V.2.32. Les espaces F et G des exemples V.2.23 et V.2.28 ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: leur somme est bien égale à $\mathbb{R}^3$, mais elle n'est pas directe.

Les deux droites de $\mathbb{R}^3$ apparaissant dans l'exemple V.2.29 ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: leur somme est directe, mais elle ne vaut pas $\mathbb{R}^3$.

Exercice V.2.33. Soit $F = \{(x_1, 0, x_3),\ (x_1, x_3) \in \mathbb{K}^2\}$ et $G = \operatorname{vect}\{(0,1,1)\}$. Vérifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. (Correction p. 53.)

Somme de plusieurs espaces vectoriels

On généralise maintenant ce qui précède au cas de plusieurs espaces vectoriels.

Soit $E_1,\ldots,E_n$ des sous-espaces vectoriels de E ($n \geq 2$).

La *somme* $E_1 + \ldots + E_n$ (notée encore $\sum_{j=1}^n E_j$) est le sous-ensemble de E formé des vecteurs $\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n$, avec $\vec{v}_j \in E_j$ pour $j = 1 \ldots n$. On montre facilement que c'est un sous-espace vectoriel de E.

On dit que cette somme est *directe* (et on la note $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$) lorsque l'écriture $\vec{v} = \vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n$ avec $\vec{v}_j \in E_j$ pour tout j est unique, i.e. lorsque

$$\Big(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n = \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n \text{ et } \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \vec{v}_j \in E_j, \vec{u}_j \in E_j\Big) \Longrightarrow \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \vec{v}_j = \vec{u}_j.$$

Cette condition est équivalente (le vérifier !) à

$$\Big(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n = \vec{0} \text{ et } \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \vec{v}_j \in E_j\Big) \Longrightarrow \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \vec{v}_j = \vec{0}.$$

Si la somme est directe, on a $j \neq k \Longrightarrow E_j \cap E_j = \{\vec{0}\}$, mais cette condition n'est pas suffisante dès que $n \geq 3$ (cf exemple V.2.34 ci-dessous).

Comme dans le cas $n = 2$, on dit que $E_1,\ldots,\ E_n$ sont *supplémentaires* lorsque leur somme est directe et vaut E. Ainsi, les espaces $(E_j)_{j=1\ldots n}$ sont supplémentaires si et seulement si tout élément $\vec{v}$ de E s'écrit de manière unique $\vec{v} = \sum_{j=1}^n \vec{v}_j$, avec $\vec{v}_j \in E_j$ pour tout j.

Exemple V.2.34. On considère

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\}, \quad D_1 = \operatorname{vect}\{(1,0,1)\}, \quad D_2 = \operatorname{vect}\{(0,1,0)\}.$$

Alors $P + D_1 + D_2 = \mathbb{R}^3$. En effet, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$(x,y,z) = \underbrace{(z-x)(0,0,1)}_{\in P} + \underbrace{x(1,0,1)}_{\in D_1} + \underbrace{y(0,1,0)}_{\in D_2}.$$

On a $P \cap D_1 = \{\vec{0}\}$, $P \cap D_2 = \{\vec{0}\}$ et $D_1 \cap D_2 = \{\vec{0}\}$, mais la somme n'est pas directe :

$$\underbrace{(1,1,1)}_{\in P} - \underbrace{(1,0,1)}_{\in D_1} - \underbrace{(0,1,0)}_{\in D_2} = (0,0,0).$$

Exemple V.2.35. Soit $n \geq 1$. Notons $\vec{e}_j$ le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la j-ième qui vaut 1. Alors les n droites $\operatorname{vect}(\vec{e}_j)$, $j = 1 \ldots n$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

V.3. Familles de vecteurs

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On étudie ici certaines propriétés des familles (finies) de vecteurs de E, qui seront utiles pour traiter, dans la partie V.4, la notion de dimension d'un espace vectoriel.

V.3.a. Familles de vecteurs : définition

Définition V.3.1. Soit n un entier ≥ 1. Une *famille* (finie) $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E est un n-uplet $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ de vecteurs de E. On note $\vec{u} \in \mathcal{F}$ quand $\vec{u}$ est un des vecteurs $\vec{u}_j$. Le nombre n est le *cardinal* de $\mathcal{F}$, et on note $n = |\mathcal{F}|$. On convient qu'il existe une seule famille de cardinal 0, notée $\emptyset$.

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ et $\mathcal{G} = (\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)$ deux familles de vecteurs. On note $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)$.

Si $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ est une famille de vecteurs, et $\mathcal{G}$ est une autre famille de la forme $(\vec{u}_{k_1},\ldots,\vec{u}_{k_p})$ avec $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leq n$, on dit que $\mathcal{G}$ est *extraite* de $\mathcal{F}$, et on note $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. On dit aussi que la famille $\mathcal{F}$ *complète* la famille $\mathcal{G}$.

Exemple V.3.2. Soit

$$\mathcal{F} = \Big((1,0,0),(0,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\Big) \text{ et } \mathcal{G} = \Big((1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\Big).$$

Alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $|\mathcal{F}| = 4$, $|\mathcal{G}| = 3$, et $\mathcal{G}$ est extraite de $\mathcal{F}$. Remarquons que le vecteur $(0,1,0)$ apparaît deux fois dans $\mathcal{F}$, ce qui n'est pas du tout interdit par la définition d'une famille.

V.3.b. Familles liées et familles libres

Définition V.3.3. Une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ de vecteurs de E est dite *liée* quand

$$\exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0} \text{ et } (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \neq (0,0,\ldots,0).$$

Une famille de vecteurs est dite *libre* quand elle n'est pas liée. On dit aussi que les vecteurs $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ sont *linéairement indépendants.*

Remarque V.3.4. En niant la définition d'une famille liée, on voit qu'une famille $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ est libre si et seulement si

$$\forall(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Exemple V.3.5. La famille $\big((0,1,1),(1,1,2)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. En effet, supposons

$$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,1,2)=(0,0,0),$$

ce qui s'écrit $\lambda_2=0$, $\lambda_1+\lambda_2=0$ et $\lambda_1+2\lambda_2=0$ et donc $\lambda_1=\lambda_2=0$.

On voit sur cet exemple que montrer qu'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre revient à montrer qu'un certain système linéaire homogène à p inconnues et n équations a pour seule solution la solution nulle.

Exemple V.3.6. Soit $\vec{v}_1=(1,0,1)$, $\vec{v}_2=(1,1,0)$ et $\vec{v}_3=(1,0,0)$. La famille $\mathcal{G}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ est libre dans $\mathbb{C}^3$. Comme dans l'exemple précédent, on est ramené à étudier un système homogène. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{C}^3$ tels que $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3=\vec{0}$. Alors

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\quad \lambda_2=0 \text{ et } \lambda_1=0,$$

ce qui donne facilement $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Exemple V.3.7. Soit $\vec{u}_1=(1,0,1)$, $\vec{u}_2=(1,1,0)$ et $\vec{u}_3=(2,1,1)$. Alors la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est liée. En effet :

$$\vec{u}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3=\vec{0}.$$

(Si l'on ne voit pas immédiatement cette relation, on peut la retrouver en résolvant le système $x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3=\vec{0}$, d'inconnues x_1, x_2 et x_3).

Exemple V.3.8. Si $\vec{0}\in\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est liée. En effet $1.\vec{0}=\vec{0}$, et $1\neq 0$.

Exemple V.3.9. Une famille à un élément $\vec{u}$ est libre si et seulement si $\vec{u}\neq\vec{0}$. En effet, si $\vec{u}=\vec{0}$ la famille n'est pas libre (cf exemple précédent). En revanche, si $\vec{u}\neq 0$, alors, par la Proposition V.1.3

$$\lambda\vec{u}=\vec{0}\Longrightarrow\lambda=0$$

ce qui montre que la famille $(\vec{u})$ est libre.

Exercice V.3.10. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1=(1,1,2),\quad \vec{u}_2=(-3,-3,-6),\quad \vec{u}_3=(1,2,3),$$
$$\vec{u}_4=(-1,0,-1),\quad \vec{u}_5=(0,2,3).$$

Les familles suivantes sont elles libres ?

$$(\vec{u}_1,\vec{u}_2),\quad (\vec{u}_1,\vec{u}_3,\vec{u}_4),\quad (\vec{u}_1,\vec{u}_3,\vec{u}_5).$$

(Réponses p. 53).

La proposition suivante découle immédiatement de la définition d'une famille libre :

Proposition V.3.11. *Si $\mathcal{F}$ est une famille libre, tout famille extraite de $\mathcal{F}$ est libre.*

On termine cette partie sur les famille libres par le *lemme utile sur les familles libres* suivant :

Lemme V.3.12. *Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\vec{v}\in E$. Alors la famille $\mathcal{F}\cup(\vec{v})$ est libre si et seulement si $\vec{v}\notin\operatorname{vect}\mathcal{F}$.*

Démonstration. On note $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$. On rappelle la définition de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ (cf §V.2.c) :

$$\operatorname{vect}\mathcal{F}=\Big\{x_1\vec{u}_1+\ldots+x_n\vec{u}_n,\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n\Big\}.$$

Supposons d'abord que $\mathcal{F}\cup(\vec{v})$ est libre. On a

$$\forall(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\quad \sum_{j=1}^n x_j\vec{u}_j-\vec{v}\neq\vec{0}. \tag{V.5}$$

En effet, c'est une combinaison linéaire d'éléments de la famille libre $\mathcal{F}\cup(\vec{v})$ avec au moins un des coefficients (celui de $\vec{v}$) non nul. Par (V.5), $\vec{v}\notin\operatorname{vect}\mathcal{F}$.

Réciproquement, on suppose $\vec{v}\notin\operatorname{vect}\mathcal{F}$. Soit $(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{K}^{n+1}$. On suppose

$$\sum_{j=1}^n x_j\vec{u}_j+y\vec{v}=\vec{0}$$

Alors $y=0$: sinon on aurait $\vec{v}=-\frac{1}{y}\sum_{j=1}^n x_j\vec{u}_j\in\operatorname{vect}\mathcal{F}$. Donc

$$\sum_{j=1}^n x_j\vec{u}_j=\vec{0},$$

ce qui implique, la famille étant libre, $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. On a montré que la famille $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n,\vec{v})$ était libre, ce qui conclut la preuve du lemme. □

Exemple V.3.13. Une famille de deux vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ est libre si et seulement si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}$ n'appartient pas à la droite $\operatorname{vect}\vec{u}$. Ceci découle immédiatement de l'exemple V.3.10 et du lemme V.3.12.

V.3.c. Familles génératrices

Définition V.3.14. La famille $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ est une *famille génératrice de E* (ou simplement *est génératrice* quand il n'y a pas d'ambiguïté) quand pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, il existe $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que

$$\vec{v}=x_1\vec{u}_1+\ldots+x_n\vec{u}_n.$$

On dit aussi que $\mathcal{F}$ *engendre E*.

Remarque V.3.15. La famille $\mathcal{F}$ est génératrice si et seulement si $\operatorname{vect}\mathcal{F}=E$.

Exemple V.3.16. La famille $\mathcal{F}_1 = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$: si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$, et donc $\mathbb{R}^2 = \operatorname{vect}\mathcal{F}_1$.

Exemple V.3.17. La famille $\mathcal{F}_2 = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$. En effet, la dernière coordonnée de tout élément de $\operatorname{vect}\mathcal{F}_2$ est nulle, et donc par exemple $(0,0,1)$ n'appartient pas à $\operatorname{vect}\mathcal{F}_2$.

Exemple V.3.18. La famille $\mathcal{G}$ de l'exemple V.3.6 p. 46 est une famille génératrice de $\mathbb{C}^3$. En effet, il s'agit de montrer que pour tout $(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{C}^3$, il existe (x_1,x_2,x_3) tel que

$$x_1(1,0,1)+x_2(1,1,0)+x_3(1,0,0)=(b_1,b_2,b_3),$$

ou encore :

$$x_1+x_2+x_3=b_1,\quad x_2=b_2,\quad x_1=b_3.$$

Il est facile de résoudre ce système. On peut aussi remarquer que c'est un système de Cramer par l'exemple V.3.6 : il a 3 équations, 3 inconnues, et une seule solution lorsque $b_1=b_2=b_3=0$. Il a donc une unique solution quel que soit (b_1,b_2,b_3).

Plus généralement, montrer qu'une famille de p vecteurs $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)$ de $\mathbb{K}^n$ est génératrice revient à montrer, pour tout $\vec{b}\in\mathbb{K}^n$, la compatibilité du système à n équations et p inconnues $(x_1,\ldots,x_p)$: $x_1\vec{v}_1+\ldots+x_p\vec{v}_p=\vec{b}$.

Le résultat suivant est une conséquence directe de la définition d'une famille génératrice :

Proposition V.3.19. *Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice. Alors toute famille qui complète $\mathcal{F}$ est encore génératrice.*

Exercice V.3.20. La famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_3,\vec{u}_5)$ de l'exercice V.3.10 est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? (cf correction p. 53).

V.3.d. Bases

Définition V.3.21. Une famille $\mathcal{F}$ de E est une *base* quand elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple V.3.22. La famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^2$. Plus généralement, si $n\geq 1$ et $j\in\{1,\ldots,n\}$, définissons $\vec{e}_j$ comme le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la j-ième, qui vaut 1. En d'autres termes, $\vec{e}_j$ est le vecteur $(\delta_{ij})_{i=1,\ldots,n}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Alors la famille $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

Exemple V.3.23. La famille $\mathcal{G}$ de l'exemple V.3.6 p. 46 est une base de $\mathbb{C}^3$: on a montré qu'elle était libre (exemple V.3.6) et génératrice (exemple V.3.18).

Exemple V.3.24. La famille $\big((2,1,0),(1,1,0)\big)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$: elle est libre mais pas génératrice (justifier).

Exemple V.3.25. La famille $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\big)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$: elle est génératrice mais pas libre (justifier).

Proposition et définition V.3.26. Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une base de E. Alors tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique

$$\vec{x}=\sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j,$$

avec $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. Les x_j sont appelés *coordonnées* de $\vec{x}$ dans la base E.

Démonstration. La famille $\mathcal{B}$ étant génératrice, tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit

$$\vec{x}=\sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j.$$

Montrons l'unicité de cette écriture. Supposons $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, $(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{K}^n$ et

$$\sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j=\vec{x}=\sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^n (x_j-y_j)\vec{e}_j=\vec{0}.$$

La famille $\mathcal{B}$ étant libre, on en déduit $x_j-y_j=0$ pour tout $j\in\{1,\ldots,n\}$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Notation V.3.27. On notera toujours les coordonnées sous la forme d'un vecteur colonne, i.e. un élément de $\mathcal{M}_{n,1}$. Cette notation permet de distinguer entre un élément de $\mathbb{K}^n$ et ses coordonnées. Par exemple, les coordonnées du vecteur $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont $\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$. Cette notation sera également commode pour faire des calculs matriciels sur les coordonnées.

V.4. Espaces vectoriels de dimension finie

V.4.a. Définition

Définition V.4.1. On dit que E est *de dimension finie* quand il admet une famille génératrice finie. On convient que l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est de dimension finie, et que la famille vide est une famille génératrice de $\{\vec{0}\}$.

Nous verrons plus loin que tous les espaces vectoriels étudiés dans ce cours (les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$) sont de dimension finie. Mentionnons toutefois qu'il existe des espaces vectoriels (au sens de la définition générale V.1.4) qui sont de dimension infinie : c'est le cas par exemple de l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{K}$. Ce type d'espace vectoriel n'est pas au programme de la première année de licence à l'Institut Galilée.

Exemple V.4.2. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie : la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est une famille génératrice finie.

V.4.b. Existence de bases

Théorème V.4.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet une base. Plus précisément, de toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut extraire une base.*

Démonstration. Le cas $E = \{\vec{0}\}$ est immédiat. On suppose donc $E \neq \{\vec{0}\}$.

On rappelle que le *cardinal* d'une famille $\mathcal{F}$, noté $|\mathcal{F}|$, est le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathbf{\Lambda}$ l'ensemble des familles libres extraites de $\mathcal{G}$. Puisque $\mathcal{G}$ contient des vecteurs non nuls (car $E \neq \{\vec{0}\}$), l'ensemble $\mathbf{\Lambda}$ n'est pas vide : il contient tous les singletons $(\vec{u})$, où $\vec{u}$ est un élément non nul de $\mathcal{G}$. Le cardinal de tout élément de $\mathbf{\Lambda}$ est bien sûr inférieur ou égal au cardinal de $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{L}$ un élément de $\mathbf{\Lambda}$ de cardinal maximal, i.e tel que toute élément de $\mathbf{\Lambda}$ a un cardinal inférieur ou égal à celui de $\mathcal{L}$ (un tel élément existe, car une famille majorée d'entiers naturels a toujours un maximum). C'est, par définition de $\mathbf{\Lambda}$, une famille libre, extraite de $\mathcal{G}$. Montrons que c'est aussi une famille génératrice. La famille $\mathcal{G}$ étant génératrice, il suffit de montrer que tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$.

Soit $\vec{u} \in \mathcal{G}$. La famille $\mathcal{L} \cup (\vec{u})$ est une famille extraite de $\mathcal{G}$, de cardinal strictement supérieur à $\mathcal{L}$. Par maximalité du cardinal de $\mathcal{L}$ ce n'est pas un élément de $\mathbf{\Lambda}$, ce qui signifie qu'elle est liée. Par le *lemme utile sur les familles libres* V.3.12, $\vec{u} \in \operatorname{vect}(\mathcal{L})$. On a bien montré que

$$\mathcal{G} \subset \operatorname{vect} \mathcal{L}.$$

On a donc $E = \operatorname{vect} \mathcal{G} \subset \operatorname{vect} \mathcal{L}$ (cf proposition V.2.20), ce qui conclut la preuve. □

Dans la preuve précédente, les bases sont construites comme des *familles libres de cardinal maximal*. Cette idée importante est à retenir et réapparaîtra dans la suite du cours.

V.4.c. Dimension d'un espace vectoriel.

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Le théorème suivant est crucial pour définir la dimension d'un espace vectoriel. On utilise pour le démontrer un résultat du chapitre **??** du cours sur les systèmes linéaires.

Théorème V.4.4. *Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}|$.*

Démonstration. On note $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{G} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$. On veut montrer $p \geq n$. On raisonne par l'absurde.

Supposons $n > p$. Puisque $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, il existe, pour tout indice $j \in \{1, \dots, n\}$, p scalaires $a_{1j}, \dots, a_{pj}$ tels que

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \vec{e}_i. \tag{V.6}$$

Considérons le système homogène

$$\forall i = 1 \dots p, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

qui a p équations et n inconnues $x_1, \dots, x_n$ (donc strictement plus d'inconnues que d'équations). Ce système est équivalent, par la méthode du pivot du chapitre **??**, à un système homogène (donc compatible) sous forme échelonnée réduite ayant n inconnues et $p' \leq p < n$ lignes non nulles : il a donc une infinité de solutions, que l'on peut décrire par $n - p'$ paramètres. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ une solution non nulle de ce système. Alors, d'après (V.6),

$$x_1 \vec{u}_1 + \ldots + x_n \vec{u}_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} x_j a_{ij} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \vec{e}_i = \vec{0},$$

car les p termes entre parenthèse dans la somme précédente sont nulles, par définitions des x_j. Puisque $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre, on doit avoir $x_1 = \ldots = x_n = 0$, une contradiction. □

On peut maintenant définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie :

Théorème et définition V.4.5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

i. Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé *dimension* de E et noté $\dim E$.
ii. Le cardinal de toute famille libre de E est inférieur ou égal à $\dim E$.
iii. Le cardinal de toute famille génératrice de E est supérieur ou égal à $\dim E$.

Démonstration. Les trois points sont conséquences du théorème V.4.4.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Puisque $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ génératrice, le théorème V.4.4 implique $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$. De plus, $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice, donc $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$. D'où (i).

Les points (ii) et (iii) découlent immédiatement du théorème V.4.4, en utilisant encore qu'une base est une famille libre et génératrice. □

Exemples V.4.6. L'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est de dimension 0 (il a pour base la famille vide $\emptyset$ par convention). L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{K}$: la base canonique a n éléments.

Soit E un espace vectoriel et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E. Alors l'espace vectoriel $\mathrm{vect}(\vec{u})$ est de dimension 1 : il a pour base $(\vec{u})$.

La famille de $\mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{F} = \big((1,2,3),(-1,0,i),(2,i,2),(\sqrt{3},i+2,3)\big)$$

n'est pas une famille libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ d'après le point (ii) : cette famille a 4 éléments, alors que $\mathbb{C}^3$ est de dimension 3.

La famille de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{G} = \big((1,2,0,4),(-1,1,2,1),(1,0,2,-1)\big)$$

n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$: elle a trois élément alors que toute famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ a au moins 4 éléments.

Exemple V.4.7. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Alors $\mathrm{vect}\,\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, qui est de dimension finie : il découle immédiatement des définitions que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathrm{vect}\,\mathcal{F}$.

V.4.d. Caractérisation des bases

Théorème V.4.8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. $\mathcal{F}$ est une base de E.

ii. $\mathcal{F}$ est une famille libre, et $|\mathcal{F}| = \dim E$.

iii. $\mathcal{F}$ est une famille génératrice, et $|\mathcal{F}| = \dim E$.

Démonstration. Les implications (i)$\Longrightarrow$(ii) et (i)$\Longrightarrow$(iii) découlent de la définition d'une base et du théorème/définition V.4.5.

Notons $n = \dim E$.

Montrons (iii)$\Longrightarrow$(i). Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice à n éléments. Alors, par le théorème V.4.3, il existe une base $\mathcal{B}$ de E extraite de $\mathcal{F}$. Mais $|\mathcal{B}| = n = |\mathcal{F}|$ par le théorème/définition V.4.5. Donc $\mathcal{B} = \mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est une base.

Montrons maintenant (ii)$\Longrightarrow$(i). Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ une famille libre de E à n éléments. Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Soit $\vec{x} \in E$. Par le théorème V.4.5, la famille $\mathcal{F} \cup (\vec{x})$ n'est pas libre (elle a $n+1$ éléments). Par le *lemme utile sur les familles libres* p.46, $\vec{x} \in \mathrm{vect}\,\mathcal{F}$. On a bien montré que $\mathcal{F}$ est génératrice, ce qui termine la preuve. □

Remarque V.4.9. D'après les théorèmes V.4.5 et V.4.8, les bases sont les familles libres de cardinal maximal et les familles génératrices de cardinal minimal.

Remarque V.4.10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On se donne une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, de cardinal n. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre. Dans le cas $E = \mathbb{K}^n$, il suffit donc, pour déterminer si $\mathcal{F}$ est une base, de savoir si un système homogène de n équations à n inconnues est un système de Cramer (ou encore si la matrice des coefficients du système est inversible). On évite ainsi de résoudre un système non-homogène (ce que l'on doit faire pour montrer directement qu'une famille de $\mathbb{K}^n$ engendre $\mathbb{K}^n$). Le lecteur est par exemple invité à montrer que

$$\big((-1,-1,2,-1),(1,-1,-1,0),(2,1,-3,1),(-2,-2,3,-2)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

V.4.e. Théorème de la base incomplète

On termine cette section sur la dimension finie par un résultat important, le théorème de la base incomplète :

Théorème V.4.11. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ une famille libre de E, de cardinal p. Alors $p \leq n$ et on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{u}_{p+1},\ldots,\vec{u}_n)$ de E.*

Démonstration. L'inégalité $p \leq n$ découle du théorème V.4.5. Montrons par récurrence descendante sur $p \in \{1,\ldots,n\}$ que toute famille libre de cardinal p peut être complétée en une base.

C'est vrai lorsque $p = n$: par le théorème V.4.8, une famille libre de cardinal n est une base.

Soit $p \in \{1,\ldots,n-1\}$. Supposons le résultat vrai pour les familles libres de cardinal $p+1$. Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ une famille libre de cardinal p. Puisque $p < n$, $\mathcal{L}$ n'est pas une base. Elle n'est donc pas génératrice, et il existe $\vec{u}_{p+1} \in E$ tel que $\vec{u}_{p+1} \notin \mathrm{vect}\,\mathcal{L}$. Par le *lemme utile sur les familles libres* p.46, la famille $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{u}_{p+1})$ est libre. Par hypothèse de récurrence, on peut la compléter en une base de E, ce qui termine la preuve. □

Exercice V.4.12. Montrer le théorème de la base incomplète sans utiliser de récurrence, en considérant une famille génératrice de cardinal minimal parmi les familles génératrices complétant la famille $\mathcal{G}$ (cf la preuve du théorème V.4.3 pour une idée proche).

Exemple V.4.13. La famille libre $\big((1,0,0),(1,1,0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ peut-être complétée en une base $\big((1,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$. Nous verrons en §V.5.d une méthode systématique pour compléter une famille libre en une base.

V.5. Sous-espaces vectoriels et dimension

V.5.a. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème V.5.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$.

Démonstration. Le principe de la preuve est de trouver une base de F, en choisissant une famille libre maximale de F. Cela doit bien sûr rappeler au lecteur la preuve du théorème V.4.3. On suppose E non réduit à $\{\vec{0}\}$, sinon le résultat est trivial.

Soit $n = \dim E \geq 1$. On commence par remarquer que toute famille libre de F est de cardinal $\leq n$. En effet, une telle famille est aussi une famille libre de E, qui est de dimension n, et le résultat découle du théorème V.4.5, (ii).

Soit
$$p = \max\Big\{|\mathcal{L}|,\ \mathcal{L} \text{ famille libre de } F\Big\}.$$
L'entier p est bien défini et inférieur ou égal à n (c'est le maximum d'une famille non vide d'entiers majorée par n). Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de F, de cardinal p. Montrons que $\mathcal{L}$ engendre F. On en déduira que $\mathcal{L}$ est une base de F, et donc que F est de dimension finie $p \leq \dim E$.

On note $\mathcal{L} = \Big(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\Big)$. Soit $\vec{v} \in F$. Par définition de p, la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v})$ n'est pas libre (car c'est une famille de cardinal $p+1 \geq p$). Par le *lemme utile sur les familles libres* p.46, $\vec{v} \in \operatorname{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$.

Ceci montre que $\mathcal{L}$ engendre F et donc, comme annoncé, que $\mathcal{L}$ est une base de F. □

Exemple V.5.2. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie, inférieure ou égale à n. En d'autres termes, tous les espaces vectoriels étudiés dans ce cours sont de dimension finie.

Exemple V.5.3. Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (un plan) de $\mathbb{R}^3$. En écrivant l'ensemble des solutions de cette équation sous forme paramétrique, on obtient

$$\begin{aligned} F &= \{(x,x,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,1,0) + z(0,0,1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{vect}\big((1,1,0),(0,0,1)\big). \end{aligned}$$

La famille $\big((1,1,0),(0,0,1)\big)$ engendre F. Puisque c'est une famille libre, c'est une base de F, ce qui montre le résultat annoncé.

Exercice V.5.4. Trouver de la même manière une base du plan de $\mathbb{C}^3$ d'équation $z_1 = iz_3$.

Le seul sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$ est E lui-même :

Proposition V.5.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de même dimension* $\dim E$. *Alors $E = F$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de E, de dimension $\dim E$. Par le théorème V.4.8, $\mathcal{B}$ est une base de E. Donc $E = \operatorname{vect}(\mathcal{B}) = F$. □

Définition V.5.6. On appelle *rang* d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{vect}\mathcal{F}$ engendré par cette famille. On note $\operatorname{rg}\mathcal{F}$ le rang de $\mathcal{F}$.

Remarque V.5.7. L'espace vectoriel $\operatorname{vect}\mathcal{F}$ a pour famille génératrice $\mathcal{F}$. D'après la démonstration du théorème V.4.3, toute famille libre extraite de $\mathcal{F}$, de cardinal maximal est une base de $\operatorname{vect}\mathcal{F}$. le rang de $\mathcal{F}$ est donc le cardinal maximal que peut avoir une famille libre extraite de $\mathcal{F}$.

Remarque V.5.8. Le rang d'une famille libre est égal à son cardinal.

Exemple V.5.9. Soit
$$\mathcal{F} = \big((1,0,2),(1,3,4),(2,3,6)\big).$$
Calculons le rang de $\mathcal{F}$. La famille $\big((1,0,2),(1,3,4)\big)$, de cardinal 2 est libre. D'autre part $(1,0,2)+(1,3,4) = (2,3,6)$, donc la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre. Puisqu'il n'y a pas de famille libre de cardinal 3 extraite de $\mathcal{F}$, le cardinal maximal d'une famille libre extraite de $\mathcal{F}$ est 2, ce qui démontre que le rang de $\mathcal{F}$ est 2.

V.5.b. Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels

Théorème V.5.10. *Soit E de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors*
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Corollaire V.5.11. *Sous les hypothèses du théorème, si la somme $F \oplus G$ est directe,* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. *Si de plus F et G sont supplémentaires dans E,* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Preuve du théorème V.5.10. On note p la dimension de F, q celle de G et k celle de $F \cap G$. On sait (cf Théorème V.5.1), que $k \leq p$ et $k \leq q$. On se donne une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ de $F \cap G$. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_p)$ de F et une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_q)$ de G. Il suffit de montrer que $\mathcal{A} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_p, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_q)$ est une base de $F+G$: on aurait alors que $\dim(F+G)$ est égal au cardinal de $\mathcal{A}$, soit $k + (p-k) + (q-k) = p+q-k$ comme annoncé.

La famille $\mathcal{A}$ engendre $F+G$: tout vecteur de $F+G$ s'écrit $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F = \operatorname{vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_p)$ et $\vec{g} \in G = \operatorname{vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_q)$.

Il reste à prouver que la famille $\mathcal{A}$ est libre. On se donne des scalaires $(x_i)_{i=1,\ldots,k}$, $(y_i)_{i=k+1,\ldots,p}$ et $(z_i)_{i=k+1,\ldots,q}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{p} y_i\vec{f}_i + \sum_{i=k+1}^{q} z_i\vec{g}_i = \vec{0}. \tag{V.7}$$

On en déduit que $\sum_{i=k+1}^{q} z_i\vec{g}_i = -\sum_{i=1}^{k} x_i\vec{e}_i - \sum_{i=k+1}^{p} y_i\vec{f}_i$ est un élément de $F \cap G$: le membre de gauche de l'égalité est dans F, le membre de droite dans G. Notons $(t_1, \ldots, t_k)$ les coordonnées de ce vecteur dans la base $(e_i)_{i=1\ldots k}$ de $F \cap G$. On a donc, par (V.7),

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i + t_i)\vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{p} y_i\vec{f}_i = \vec{0},$$

ce qui implique, la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_p)$ étant libre, que $y_{k+1} = \ldots = y_p = 0$. En revenant à (V.7), on obtient

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{q} z_i\vec{g}_i = \vec{0},$$

ce qui montre, en utilisant que la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_q)$ est libre, que $x_1 = \ldots = x_k = z_{k+1} = \ldots = z_q = 0$. Finalement, tous les coefficients de la combinaison linéaire (V.7) sont bien nuls, ce qui montre comme annoncé que la famille $\mathcal{A}$ est libre. □

Exemple V.5.12. Le théorème V.5.10 donne une information "gratuite" (la dimension) pour calculer $F+G$. Considérons par exemple les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\}$ et $G = \text{vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$. Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Pour cela, on remarque que $\dim F = 2$ (exemple V.5.3), $\dim G = 2$ (G est engendré par une famille libre de dimension 2). De plus $\dim(F \cap G) = 1$. En effet, si $\vec{x} = (x,y,z) \in G$, alors $\vec{x}$ s'écrit $\lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1)$. De plus, $\vec{x} \in F \iff x = y \iff \mu = 0$. Donc $F \cap G = \text{vect}\{(1,1,0)\}$ est bien de dimension 1. Par le théorème V.5.10,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Par la proposition V.5.5, $F + G = \mathbb{R}^3$.

V.5.c. Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

On connaît deux façons de décrire un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$: comme l'espace vectoriel engendré par une de ses bases, ou comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (on parle dans ce deuxième cas de *description par des équations cartésiennes*, ou simplement de *description cartésienne* de F). On explique ici comment passer d'une de ces écritures à l'autre.

Passer d'un système d'équations à une base

Soit (S) un système linéaire homogène sur $\mathbb{K}$ à n inconnues. L'ensemble F des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. La méthode du pivot de Gauss, vue au chapitre **??** du cours, permet de déterminer une base de F : on trouve, par cette méthode, un système (S') équivalent à (S) et sous forme échelonnée réduite. Soit p' le nombre de lignes non nulles de (S'). D'après le chapitre **??**, on peut décrire l'ensemble F avec $n - p'$ paramètres (les variables libres du système). Cette description donne une base de (S') à $n - p'$ éléments.[2] L'espace vectoriel F est de dimension $n - p'$.

Considérons par exemple l'espace vectoriel

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x + 2y - t = 0 \text{ et } z + 2t = 0\}.$$

On veut trouver une base et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F. Celui-ci est décrit par un système linéaire qui est déjà sous forme échelonnée réduite. Les variables libres sont y et t, les variables de base x et z. L'ensemble F est donné par

$$F = \{(-2y+t, y, -2t, t),\ (y,t) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-2,1,0,0) + t(1,0,-2,1),\ (y,t) \in \mathbb{R}^2\},$$

ou encore

$$F = \text{vect}\{(-2,1,0,0),(1,0,-2,1)\}.$$

La famille $\big((-2,1,0,0),(1,0,-2,1)\big)$ est une base de F.

Passer d'une famille génératrice à un système d'équations

Soit maintenant F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ dont on connaît une famille génératrice $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k)$. On cherche une description cartésienne de F. Soit $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. On écrit

$$\begin{aligned}\vec{x} \in F &\iff \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k,\ \lambda_1\vec{f}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{f}_k = \vec{x}\\ &\iff \text{Le système } (S) : \lambda_1\vec{f}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{f}_k = \vec{x},\\ &\qquad\qquad \text{d'inconnues } \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \text{ est compatible.}\end{aligned}$$

On transforme alors, par la méthode du pivot, le système (S) en un système sous forme échelonnée réduite (S'). La compatibilité des systèmes (S) et (S') est équivalente à la nullité des membres de droite des lignes de (S') dont le membre de gauche est nul, ce qui donne un système linéaire sur les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\vec{x}$, donc une description cartésienne de F.

Exemple V.5.13. Soit $F = \text{vect}\{(1,3,-4),(2,-1,-1)\}$. Alors

$$(x,y,z) \in F \iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ t.q. } (S)\begin{cases}\lambda + 2\mu = x\\ 3\lambda - \mu = y\\ -4\lambda - \mu = z\end{cases}$$

2. Le fait que cette famille est libre résulte de la forme échelonnée de (S').

Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) + 4(L_1)$, puis $(L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2)$, on obtient le système sous forme échelonnée réduite, équivalent au système (S) :

$$\text{(S')} \qquad \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -7\mu = y - 3x \\ 0 = x + y + z. \end{cases}$$

On voit que (S') admet une solution (λ, μ) si et seulement si $x + y + z = 0$, ce qui donne une description cartésienne de F :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\}.$$

Pour résumer :

Proposition V.5.14. *Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ admet une description cartésienne. Si $p = \dim F$, F s'écrit comme l'ensemble des solutions d'un système homogène sous forme échelonnée réduite à n inconnues et $n - p$ équations.*

En particulier, une droite de $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système homogène sous forme échelonnée à $n - 1$ équations. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - 1$ (un tel sous-espace vectoriel est appelé *hyperplan* de $\mathbb{K}^n$) s'écrit comme l'ensemble des solutions d'une seule équation linéaire homogène. En particulier, un plan de $\mathbb{R}^3$ peut toujours s'écrire comme l'ensemble des (x, y, z) tels que $ax + by + cz = 0$ pour un certain triplet de réels non tous nuls (a, b, c).

V.5.d. Manipulation de familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Calcul du rang d'une famille. Extraction d'une base

On rappelle que le *rang* d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour rechercher le rang de $\mathcal{F}$, il suffit donc de trouver une base de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$. La démonstration facile de la proposition suivante est laissée au lecteur :

Proposition V.5.15. *Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ une famille de vecteurs de E. Soit $\mathcal{F}'$ une des familles suivantes :*

— *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en échangeant les vecteurs $\vec{e}_j$ et $\vec{e}_k$, où $j \neq k$.*
— *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en remplaçant le j-ième vecteur $\vec{e}_j$ par le vecteur $\vec{e}_j + \lambda \vec{e}_k$ où $j \neq k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
— *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en remplaçant le j-ième vecteur $\vec{e}_j$ par le vecteur $\lambda \vec{e}_j$, où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Alors $\operatorname{vect} \mathcal{F} = \operatorname{vect} \mathcal{F}'$.

En d'autres termes, les opérations élémentaires sur les vecteurs (analogues des opérations élémentaires sur les lignes du chapitre **??**) ne changent pas $\operatorname{vect} \mathcal{F}$. Lorsque $E = \mathbb{K}^n$, on peut alors trouver une base de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ en appliquant la méthode du pivot de Gauss sur les éléments de $\mathcal{F}$, pour ramener $\mathcal{F}$ à une famille de vecteurs échelonnée, au sens de la définition suivante :

Définition V.5.16. Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est dite *échelonnée* lorsque la matrice $p \times n$ obtenue en mettant à la i-ième ligne les coordonnées de $\vec{v}_i$ est échelonnée.

Il est facile de voir que le rang d'une famille de vecteurs échelonnée est égal au nombre de vecteurs non nuls de cette famille.

Exemple V.5.17. Considérons la famille de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = \big((-1, -2, 2, 3), (0, -1, 2, 1), (1, 1, 0, 0), (-1, 0, -2, -2)\big)$. On applique la méthode du pivot à $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{llll} (-1,-2,2,3) & & (-1,-2,2,3) & \\ (0,-1,2,1) & & (0,-1,2,1) & \\ (0,-1,2,3) & (L_3)+(L_1) & (0,0,0,2) & (L_3)-(L_2) \\ (0,2,-4,-5) & (L_4)-(L_1) & (0,0,0,-3) & (L_4)+2(L_2) \end{array}$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc de même rang que la famille $\mathcal{F}' = \big((-1, -2, 2, 3), (0, -1, 2, 1), (0, 0, 0, 2)\big)$, qui est une famille de vecteurs échelonnée. Donc $\mathcal{F}$ est de rang 3, et $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ a pour base $\mathcal{F}'$. On peut également remarquer que par construction de $\mathcal{F}'$, les trois premiers vecteurs de $\mathcal{F}$ engendrent $\operatorname{vect} \mathcal{F}'$ et donc que ces trois premiers vecteurs forment une base de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$.

Compléter une famille libre en une base

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ qui complète $\mathcal{F}$. Pour trouver une telle base, on peut “échelonner” la famille comme précédemment, à l'aide de la proposition V.5.15, puis compléter par les vecteurs appropriés de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple V.5.18. La famille $\big((-1, -2, 2, 3), (0, -1, 2, 1), (0, 0, 0, 2)\big)$ de $\mathbb{R}^4$, obtenue plus haut, est libre et échelonnée. Elle se complète de manière triviale en une base $\big((-1, -2, 2, 3), (0, -1, 2, 1), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\big)$ de $\mathbb{R}^4$.

Exemple V.5.19. La famille $\mathcal{F} = \big((1, 3, 2), (2, -2, 3)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ est libre. Par l'opération $(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1)$, on obtient la famille échelonnée $\mathcal{F}' = \big((1, 3, 2), (0, -8, -1)\big)$, qui vérifie, par la proposition V.5.15, $\operatorname{vect} \mathcal{F} = \operatorname{vect} \mathcal{F}'$. On complète la famille $\mathcal{F}'$ en une base $\big((1, 3, 2), (0, -8, -1), (0, 0, 1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $\big((1, 3, 2), (2, -2, 3), (0, 0, 1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, qui complète $\mathcal{F}$.

Réponse à quelques exercices

Exercice V.2.8. Remarquons que E est un espace vectoriel, car c'est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène (cf exemple V.1.6). Les ensembles F_1 et F_2 contiennent $\vec{0}$, sont stables par addition et par multiplication par un scalaire : ce sont donc des espaces vectoriels. L'ensemble F_2 est inclus dans E : c'est bien un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble F_1 n'est pas inclus dans E (par exemple $(1, 0, -1, 0)$ est dans F_1 mais pas dans E). Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E. Enfin, F_3 n'est pas un espace vectoriel (il ne contient pas l'élément nul $(0, 0, 0, 0)$). Ce n'est donc pas non plus un sous-espace vectoriel de E.

Exercice V.2.33. Soit $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. On cherche à écrire $\vec{y}$ comme la somme d'un élément $(x_1, 0, x_3)$ de F et d'un élément $(0, \lambda, \lambda)$ de G, i.e résoudre le système (d'inconnues x_1, λ et x_3) :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \lambda = y_2 \\ x_3 + \lambda = y_3 \end{cases}$$

Ce système à une unique solution : $(x_1, \lambda, x_3) = (y_1, y_2, y_3 - y_2)$, ce qui montre bien que la somme de F et G est $\mathbb{R}^3$ (grâce à l'existence de la solution) et que cette somme est directe (grâce à l'unicité de cette solution)

Exercice V.3.10. On voit tout de suite que $\vec{u}_2 = -3\vec{u}_1$ (ce qui peut s'écrire $\vec{u}_2 + 3\vec{u}_1 = \vec{0}$). La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ n'est donc pas libre.

Pour étudier l'indépendance linéaire de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$, on résout le système, d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4)$:

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_3\vec{u}_3 + \lambda_4\vec{u}_4 = \vec{0}.$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on trouve que ce système a des solutions non nulles (l'ensemble des solutions est l'ensemble des $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 = 2\lambda_4$ et $\lambda_3 = -\lambda_4$). La famille n'est donc pas libre.

De même, pour étudier la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_5)$, on résout le système

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_3\vec{u}_3 + \lambda_5\vec{u}_5 = \vec{0},$$

d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5)$. On trouve que ce système a pour solution unique la solution nulle, ce qui montre que la famille est libre.

Exercice V.3.20. La famille est bien génératrice. En effet, on doit montrer que pour tout élément (y_1, y_2, y_3) de $\mathbb{R}^3$, le système

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_3\vec{u}_3 + \lambda_5\vec{u}_5 = (y_1, y_2, y_3),$$

d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5)$ a au moins une solution. C'est un système à 3 équations et 3 inconnues, qui, d'après la correction de l'exercice V.3.10, a une unique solution dans le cas $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$. C'est donc un système de Cramer, ce qui montre qu'il y a bien une solution (unique) quelque soit le second membre (y_1, y_2, y_3).

VI. Quelques techniques en algorithmique

Le chapitre IV a introduit la notion de complexité d'un algorithme. Ici, on présente deux techniques très classiques pour définir des algorithmes avec une complexité plus faibles (*i.e.*, plus rapide) : la méthode diviser pour régner et la programmation dynamique.

VI.1. Diviser pour régner

Alice choisit un nombre entre 1 et 100 que Bob doit deviner. À chaque fois que Bob se trompe, Alice lui dit si son nombre est plus grand ou plus petit. Quelle stratégie pour Bob ? S'il propose 1 et que Alice dit "plus grand", il lui restera encore 99 possibilités. S'il propose 80 et que Alice dit "plus grand", il ne lui restera plus que 20 possibilités, mais si elle dit "plus petit" il lui en restera quand même 79. Il choisit donc de proposer 50 : qu'Alice dise "plus grand" ou "plus petit", il ne lui restera que la moitié des possibilités à tester. Et il utilisera la même stratégie sur la moitié restante : à chaque fois proposer le nombre médian. Comme Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, Bob a fait une *recherche dichotomique*.

La recherche dichotomique est un des nombreux algorithmes utilisant la méthode *diviser pour régner*, qui fonctionne en trois temps :

Diviser : découper un problème initial en sous-problèmes ;

Régner : résoudre les sous-problèmes (récursivement ou directement) ;

Combiner : en déduire une solution au problème initial.

Dans le cas de la recherche dichotomique :

Diviser : Bob découpe en deux l'intervalle de recherche en proposant un nombre ;

Régner : l'un des intervalles est éliminé par la réponse d'Alice, tandis que Bob relance récursivement sur l'autre (sauf s'il a trouvé le nombre choisi par Alice) ;

Combiner : simplement se rappeler du nombre trouvé.

Pour trouver un nombre entre 1 et n, le nombre $C(n)$ de proposition que Bob doit faire dans le pire des cas vérifie donc l'équation

$$C(n) = C\left(\frac{n}{2}\right) + 1,$$

où 1 correspond à la question de Bob et $C\left(\frac{n}{2}\right)$ au nombre de comparaisons effectuées sur l'intervalle non éliminé par la réponse d'Alice. On calcule alors en itérant :

$$C(n) = C\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = C\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 = \ldots = C\left(\frac{n}{2^p}\right) + p.$$

Avec $p = log_2(n)$ on a $2^p = n$ et donc $C(n) = O(\log_2(n))$ (car $C(1)$ est une constante). C'est bien mieux que d'essayer les n nombres l'un après l'autre !

Un autre exemple classique est le tri : comment classer n nombres du plus petit au plus grand ? Le *tri par insertion* consiste à insérer un à un les nombres à leur place dans un tableau où ils seront triés. Si, pour insérer un nombre, on le compare à tous ceux déjà dans le tableau trié, alors le nombre maximal $C(n)$ de comparaisons effectuées sera

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k = O(n^2).$$

En utilisant une recherche dichotomique pour insérer chaque nombre à sa place on diminue le nombre de comparaison :

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} O(\log_2(k)) = O(n \log_2(n)).$$

On peut aussi réaliser un *tri fusion* qui repose sur la méthode diviser pour régner :

Diviser : partager les nombres à trier en deux sous-ensembles de même taille ;

Régner : trier récursivement chaque sous-ensemble (rien à faire si un seul nombre) ;

Combiner : *fusionner* les deux sous-ensembles triés en un seul ensemble trié.

La fusion de deux ensembles triés se réalise comme suit : à chaque étape on compare le plus petit élément d'un ensemble avec le plus petit de l'autre et on met le plus petit dans l'ensemble final. On fait donc au plus autant de comparaisons qu'il y a de nombres à fusionner. Le nombre $C(n)$ de comparaisons nécessaire à trier un ensemble de n nombres vérifie donc l'équation

$$C(n) = 2C\left(\frac{n}{2}\right) + n,$$

où n correspond au nombre de comparaisons pour fusionner et $2C\left(\frac{n}{2}\right)$ à celui nécessaire à trier chacun des deux sous-ensembles. On calcule en itérant :

$$C(n) = 2C\left(\frac{n}{2}\right)+n = 2\left(2C\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right)+n = 2^2C\left(\frac{n}{2^2}\right)+2n = \ldots = 2^pC\left(\frac{n}{2^p}\right)+pn$$

Avec $p = log_2(n)$ on a $2^p = n$ et donc $C(n) = O(n \log_2(n))$.

Il existe de nombreux autres exemples. En TD/TP on verra comment multiplier deux matrices $n \times n$ avec moins de n^3 multiplications !

VI.2. Programmation dynamique

Le concept de *programmation dynamique* a été introduit au début des années 1950. Comme diviser pour régner, il consiste à résoudre un problème en le décomposant en sous-problèmes. Mais contrairement à diviser pour régner, ces sous-problèmes ne sont pas toujours indépendants et un même calcul peut apparaÃ®tre plusieurs fois. L'idée est alors de stocker les résultats des calculs déjà faits en mémoire et de vérifier, avant de faire tout nouveau calcul, s'il n'a pas déjà été fait.

Illustrons ce concept un peu abstrait sur un exemple, celui du *rendu de monnaie*. On cherche à rendre n euros avec des pièces de 1, 2 et 5 euros en en utilisant le moins possible. Soit $r(n)$ ce nombre minimal de pièces à rendre. Si la première pièce que l'on rend vaut x, il restera ensuite $n-x$ euros à rendre, qu'on pourra rendre avec $r(n-x)$ pièces (par définition de r). Avec la première pièce, cela fera $r(n-x)+1$ pièces. Il suffit donc d'essayer pour tous les x et de prendre le minimum :

$$r(n) = \min_{x\in\{1,2,5\}} r(n-x)+1.$$

On est donc ramenés à quatre sous-problèmes, un pour chaque valeur de x. Mais ceux-ci ne sont pas indépendants. Par exemple, pour calculer $r(n-1)$ on va avoir besoin de $r(n-2)$, $r(n-3)$ et $r(n-5)$, mais on a déjà eu besoin de $r(n-2)$ pour calculer $r(n)$! On crée donc un tableau de n cases, et quand on a besoin de $r(k)$ on regarde dans la $k^{\text{ème}}$ case de ce tableau si la valeur de $r(k)$ y est déjà : si oui on la lit, sinon on la calcule et on met à jour cette case du tableau. En C, avec un pointeur `tab` sur une zone mémoire contenant $n+1$ entiers nuls, cela donne :

```
int rendu(int* tab, int n)
{
 if (n==1||n==2||n==5) tab[n]=1;
 if (tab[n]>0) return tab[n];
 int r=min(rendu(tab,n-1),rendu(tab,n-2));
 if (n>5) r=min(c,rendu(tab,n-5));
 tab[n]=r+1;
 return r+1;
}
```

Quid de la complexité de cet algorithme si, par exemple, on la mesure par le nombre $M(n)$ d'appel à la fonction `min` ? La façon dont les appels récursifs se font n'est pas très claire, mais à chaque fois qu'il y a deux `min` dans un appel à `rendu`, il y a une case du tableau qui est remplie. Or on ne remplit qu'au plus une fois chacune des n cases de ce tableau. Donc $M(n) \in O(n)$: la complexité est linéaire. Soulignons que si on n'utilisait pas de tableau pour éviter de refaire plusieurs fois le même calcul, la complexité vérifierait :

$$M(n) = 2 + M(n-1) + M(n-2) + M(n-5).$$

Ce qui ferait une complexité exponentielle car on montre par induction qu'il existe $c>0$ et $\mu>1$ tel que $M(n)\geq c\mu^n$. En effet, c'est vrai pour $n\leq 5$ quitte à choisir c assez petit, et si c'est vrai jusqu'à $n-1$, alors ça l'est pour n si

$$2+\mu^{n-1}+\mu^{n-2}+\mu^{n-5}\geq\mu^n,$$

ce qui est assuré pour $\mu = 3^{1/5} > 1$.

Table des matières