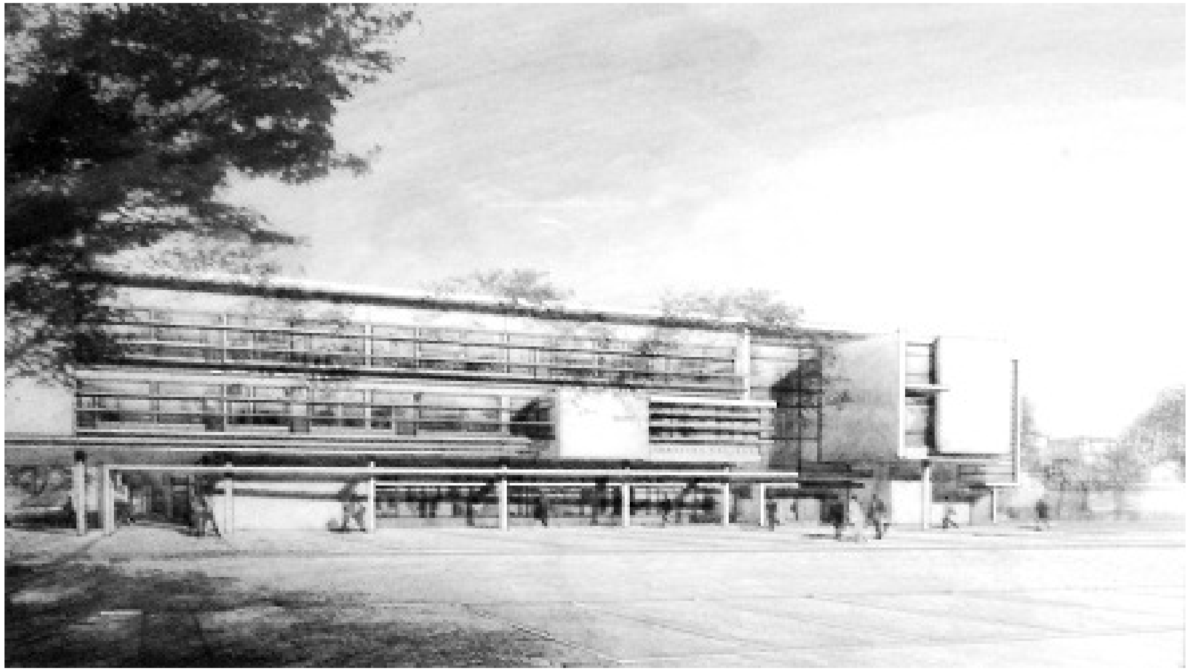
Institut Galilée

Sciences et technologies



Licence 1ère année. Deuxième semestre 2017/2018

Algèbre linéaire et algorithmique. Tome II

©INSTITUT GALILEE, 99 avenue Jean-Baptiste-Clément 93430 VILLETANEUSE 2017/2018

VI. Espaces vectoriels de dimension finie

1. Dimension d'un espace vectoriel

1.a. Définition de la dimension fine

Définition 1.1. On dit que E est *de dimension finie* quand il admet une famille génératrice finie. On convient que l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est de dimension finie, et que la famille vide est une famille génératrice de $\{\vec{0}\}$.

Nous verrons plus loin que les principaux exemples d'espaces vectoriels étudiés dans ce cours, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$, sont tous de dimension finie. Mentionnons toutefois qu'il existe des espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie : c'est le cas par exemple de l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{K}$. Nous ne nous intéresserons pas à ce type d'espace vectoriel lors de la première année de licence à l'Institut Galilée.

Exemple 1.2. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie : la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est une famille génératrice finie.

1.b. Existence de bases

Théorème 1.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet une base. Plus précisément, de toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut extraire une base.*

Démonstration. Le cas $E = \{\vec{0}\}$ est immédiat. On suppose donc $E \neq \{\vec{0}\}$.

On rappelle que le *cardinal* d'une famille $\mathcal{F}$, noté $|\mathcal{F}|$, est le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathbf{\Lambda}$ l'ensemble des familles libres extraites de $\mathcal{G}$. Puisque $\mathcal{G}$ contient des vecteurs non nuls (car $E \neq \{\vec{0}\}$), l'ensemble $\mathbf{\Lambda}$ n'est pas vide : il contient tous les singletons $(\vec{u})$, où $\vec{u}$ est un élément non nul de $\mathcal{G}$. Le cardinal de tout élément de $\mathbf{\Lambda}$ est bien sûr inférieur ou égal au cardinal de $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{L}$ un élément de $\mathbf{\Lambda}$ de cardinal maximal, i.e. tel que tout élément de $\mathbf{\Lambda}$ a un cardinal inférieur ou égal à celui de $\mathcal{L}$ (un tel élément existe, car une famille majorée d'entiers naturels a toujours un maximum). C'est, par définition de $\mathbf{\Lambda}$, une famille libre, extraite de $\mathcal{G}$. Montrons que c'est aussi une famille génératrice. La famille $\mathcal{G}$ étant génératrice, il suffit de montrer que tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$.

Soit $\vec{u} \in \mathcal{G}$. La famille $\mathcal{L} \cup (\vec{u})$ est une famille extraite de $\mathcal{G}$, de cardinal strictement supérieur à $\mathcal{L}$. Par maximalité du cardinal de $\mathcal{L}$ ce n'est pas un élément de $\mathbf{\Lambda}$, ce qui signifie qu'elle est liée. Par le *lemme utile sur les familles libres* (lemme 3.12 du Chapitre V, p. 48), $\vec{u} \in \operatorname{vect}(\mathcal{L})$. On a bien montré que

$$\mathcal{G} \subset \operatorname{vect} \mathcal{L}.$$

On a donc $E = \operatorname{vect} \mathcal{G} \subset \operatorname{vect} \mathcal{L}$ (cf proposition 2.21 du Chapitre V, p. 45), ce qui conclut la preuve.

□

Dans la preuve précédente, les bases sont construites comme des *familles libres de cardinal maximal*. Cette idée importante est à retenir et réapparaîtra dans la suite du cours.

1.c. Dimension d'un espace vectoriel.

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Le théorème suivant est crucial pour définir la dimension d'un espace vectoriel. On utilise pour le démontrer un résultat du chapitre I du cours sur les systèmes linéaires.

Théorème 1.4. *Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}|$.*

Démonstration. On note $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{G} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$. On veut montrer $p \geq n$. On raisonne par l'absurde.

Supposons $n > p$. Puisque $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, il existe, pour tout indice $j \in \{1, \dots, n\}$, p scalaires $a_{1j}, \dots, a_{pj}$ tels que

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \vec{e}_i. \tag{VI.1}$$

Considérons le système homogène

$$\forall i = 1 \dots p, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0$$

qui a p équations et n inconnues $x_1, \dots, x_n$ (donc strictement plus d'inconnues que d'équations). Ce système est équivalent, par la méthode du pivot du chapitre I, à un système homogène (donc compatible) sous forme échelonnée réduite ayant n inconnues et $p' \leq p < n$ lignes non nulles : il a donc une infinité de solutions, que l'on peut décrire par $n-p'$ paramètres. Notons $(x_1,\ldots,x_n)$ une solution **non nulle** de ce système. Alors, d'après (VI.1),

$$x_1\vec{u}_1+\ldots+x_n\vec{u}_n=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}x_ja_{i,j}\vec{e}_i=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}x_ja_{i,j}\right)\vec{e}_i=\vec{0},$$

car les p termes entre parenthèse dans la somme précédente sont nulles, par définitions des x_j. Puisque $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ est libre, on doit avoir $x_1=\ldots=x_n=0$, une contradiction. □

On peut maintenant définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie :

Théorème et définition 1.5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

i. Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé *dimension* de E et noté $\dim E$.
ii. Le cardinal de toute famille libre de E est inférieur ou égal à $\dim E$.
iii. Le cardinal de toute famille génératrice de E est supérieur ou égal à $\dim E$.

Démonstration. Les trois points sont conséquences du théorème 1.4.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Puisque $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ génératrice, le théorème 1.4 implique $|\mathcal{B}|\leq|\mathcal{B}'|$. De plus, $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice, donc $|\mathcal{B}'|\leq|\mathcal{B}|$. D'où (i).

Les points (ii) et (iii) découlent immédiatement du théorème 1.4, en utilisant encore qu'une base est une famille libre et génératrice. □

Exemples 1.6. On convient que l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est de dimension 0 et a pour base la famille vide $\emptyset$.

L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{K}$: la base canonique a n éléments.

Soit E un espace vectoriel et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E. Alors l'espace vectoriel $\operatorname{vect}(\vec{u})$ est de dimension 1 : il a pour base $(\vec{u})$.

La famille de $\mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{F}=\big((1,2,3),(-1,0,i),(2,i,2),(\sqrt{3},i+2,3)\big)$$

n'est pas une famille libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ d'après le point (ii) : cette famille a 4 éléments, alors que $\mathbb{C}^3$ est de dimension 3.

La famille de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{G}=\big((1,2,0,4),(-1,1,2,1),(1,0,2,-1)\big)$$

n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$: elle a trois élément alors que toute famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ a au moins 4 éléments.

Exemple 1.7. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Alors $\operatorname{vect}\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, qui est de dimension finie : il découle immédiatement des définitions que $\mathcal{F}$ est une base de $\operatorname{vect}\mathcal{F}$.

1.d. Caractérisation des bases

Théorème 1.8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. $\mathcal{F}$ est une base de E.
ii. $\mathcal{F}$ est une famille libre et $|\mathcal{F}|=\dim E$.
iii. $\mathcal{F}$ est une famille génératrice et $|\mathcal{F}|=\dim E$.

Démonstration. Les implications (i)$\Longrightarrow$(ii) et (i)$\Longrightarrow$(iii) découlent de la définition d'une base et du théorème/définition 1.5.

Notons $n=\dim E$.

Montrons (iii)$\Longrightarrow$(i). Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice à n éléments. Alors, par le théorème 1.3, il existe une base $\mathcal{B}$ de E extraite de $\mathcal{F}$. Mais $|\mathcal{B}|=n=|\mathcal{F}|$ par le théorème/définition 1.5. Donc $\mathcal{B}=\mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est une base.

Montrons maintenant (ii)$\Longrightarrow$(i). Soit $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ une famille libre de E à n éléments. Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Soit $\vec{x}\in E$. Par le théorème 1.5, la famille $\mathcal{F}\cup(\vec{x})$ n'est pas libre (elle a $n+1$ éléments). Par le *lemme utile sur les familles libres* p.48, $\vec{x}\in\operatorname{vect}\mathcal{F}$. On a bien montré que $\mathcal{F}$ est génératrice, ce qui termine la preuve. □

Remarque 1.9. D'après les théorèmes 1.5 et 1.8, les bases sont les familles libres de cardinal maximal et les familles génératrices de cardinal minimal.

Remarque 1.10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On se donne une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, de cardinal n. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre. Dans le cas $E=\mathbb{K}^n$, il suffit donc, pour déterminer si $\mathcal{F}$ est une base, de savoir si un système homogène de n équations à n inconnues est un système de Cramer (ou encore si la matrice des coefficients du système est inversible). On évite ainsi de résoudre un système non-homogène (ce que l'on doit faire pour montrer directement qu'une famille de $\mathbb{K}^n$ engendre $\mathbb{K}^n$). Le lecteur est par exemple invité à montrer que

$$\big((-1,-1,2,-1),(1,-1,-1,0),(2,1,-3,1),(-2,-2,3,-2)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

1.e. Théorème de la base incomplète

On termine cette section sur la dimension finie par un résultat important, le théorème de la base incomplète :

Théorème 1.11. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{L}=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ une famille libre de E, de cardinal p. Alors $p\leq n$ et on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p,\vec{u}_{p+1},\ldots,\vec{u}_n)$ de E.*

Démonstration. L'inégalité $p \leq n$ découle du théorème 1.5. Montrons par récurrence descendante sur $p \in \{1, \ldots, n\}$ que toute famille libre de cardinal p peut être complétée en une base.

C'est vrai lorsque $p = n$: par le théorème 1.8, une famille libre de cardinal n est une base.

Soit $p \in \{1, \ldots, n-1\}$. Supposons le résultat vrai pour les familles libres de cardinal $p+1$. Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille libre de cardinal p. Puisque $p < n$, $\mathcal{L}$ n'est pas une base. Elle n'est donc pas génératrice, et il existe $\vec{u}_{p+1} \in E$ tel que $\vec{u}_{p+1} \notin \operatorname{vect} \mathcal{L}$. Par le *lemme utile sur les familles libres* 3.12 du chapitre V, la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ est libre. Par hypothèse de récurrence, on peut la compléter en une base de E, ce qui termine la preuve. □

Exercice 1.12. Montrer le théorème de la base incomplète sans utiliser de récurrence, en considérant une famille génératrice de cardinal minimal parmi les familles génératrices complétant la famille $\mathcal{G}$ (cf la preuve du théorème 1.3 pour une idée proche).

Exemple 1.13. La famille libre $\big((1,0,0),(1,1,0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ peut-être complétée en une base $\big((1,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$. Nous verrons en §2.d une méthode systématique pour compléter une famille libre en une base.

2. Sous-espaces vectoriels et dimension

2.a. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 2.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$.

Démonstration. Le principe de la preuve est de trouver une base de F, en choisissant une famille libre maximale de F. Cela doit bien sûr rappeler au lecteur la preuve du théorème 1.3. On suppose E non réduit à $\{\vec{0}\}$, sinon le résultat est trivial.

Soit $n = \dim E \geq 1$. On commence par remarquer que toute famille libre de F est de cardinal $\leq n$. En effet, une telle famille est aussi une famille libre de E, qui est de dimension n, et le résultat découle du théorème 1.5, (ii).

Soit
$$p = \max\Big\{|\mathcal{L}|,\ \mathcal{L} \text{ famille libre de } F\Big\}.$$
L'entier p est bien défini et inférieur ou égal à n (c'est le maximum d'une famille non vide d'entiers majorée par n). Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de F, de cardinal p. Montrons que $\mathcal{L}$ engendre F. On en déduira que $\mathcal{L}$ est une base de F, et donc que F est de dimension finie $p \leq \dim E$.

On note $\mathcal{L} = \Big(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\Big)$. Soit $\vec{v} \in F$. Par définition de p, la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v})$ n'est pas libre (car c'est une famille de cardinal $p+1 \geq p$). Par le *lemme utile sur les familles libres* p.48, $\vec{v} \in \operatorname{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$.

Ceci montre que $\mathcal{L}$ engendre F et donc, comme annoncé, que $\mathcal{L}$ est une base de F. □

Exemple 2.2. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie, inférieure ou égale à n.

Exemple 2.3. Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (un plan) de $\mathbb{R}^3$. En écrivant l'ensemble des solutions de cette équation sous forme paramétrique, on obtient
$$\begin{aligned} F &= \{(x,x,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,1,0) + z(0,0,1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{vect}\big((1,1,0),(0,0,1)\big). \end{aligned}$$
La famille $\big((1,1,0),(0,0,1)\big)$ engendre F. Puisque c'est une famille libre, c'est une base de F, ce qui montre le résultat annoncé.

Exercice 2.4. Trouver de la même manière une base du plan de $\mathbb{C}^3$ d'équation $z_1 = iz_3$.

Le seul sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$ est E lui-même :

Proposition 2.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de même dimension* $\dim E$. *Alors $E = F$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de E, de dimension $\dim E$. Par le théorème 1.8, $\mathcal{B}$ est une base de E. Donc $E = \operatorname{vect}(\mathcal{B}) = F$. □

Définition 2.6. On appelle *rang* d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ engendré par cette famille. On note $\operatorname{rg} \mathcal{F}$ le rang de $\mathcal{F}$.

Remarque 2.7. L'espace vectoriel $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ a pour famille génératrice $\mathcal{F}$. D'après la démonstration du théorème 1.3, toute famille libre extraite de $\mathcal{F}$, de cardinal maximal est une base de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$. le rang de $\mathcal{F}$ est donc le cardinal maximal que peut avoir une famille libre extraite de $\mathcal{F}$.

Remarque 2.8. Le rang d'une famille libre est égal à son cardinal.

Exemple 2.9. Soit
$$\mathcal{F} = \big((1,0,2),(1,3,4),(2,3,6)\big).$$
Calculons le rang de $\mathcal{F}$. La famille $\big((1,0,2),(1,3,4)\big)$, de cardinal 2 est libre. D'autre part $(1,0,2) + (1,3,4) = (2,3,6)$, donc la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre. Puisqu'il n'y a pas de famille libre de cardinal 3 extraite de $\mathcal{F}$, le cardinal maximal d'une famille libre extraite de $\mathcal{F}$ est 2, ce qui démontre que le rang de $\mathcal{F}$ est 2.

2.b. Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels

Théorème 2.10. *Soit E de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Corollaire 2.11. *Sous les hypothèses du théorème, si la somme $F \oplus G$ est directe, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. Si de plus F et G sont supplémentaires dans E, $\dim F + \dim G = \dim E$.*

Preuve du théorème 2.10. La démonstration est basée sur la construction d'une base de $F+G$. Elle est à retenir.

On note p la dimension de F, q celle de G et k celle de $F \cap G$. On sait (cf Théorème 2.1), que $k \leq p$ et $k \leq q$. On se donne une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ de $F \cap G$. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_p)$ de F et une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_q)$ de G. Il suffit de montrer que $\mathcal{A} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_p, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_q)$ est une base de $F+G$: on aurait alors que $\dim(F+G)$ est égal au cardinal de $\mathcal{A}$, soit $k + (p-k) + (q-k) = p+q-k$ comme annoncé.

La famille $\mathcal{A}$ engendre $F+G$: tout vecteur de $F+G$ s'écrit $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F = \operatorname{vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_p)$ et $\vec{g} \in G = \operatorname{vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_q)$.

Il reste à prouver que la famille $\mathcal{A}$ est libre. On se donne des scalaires $(x_i)_{i=1,\ldots,k}$, $(y_i)_{i=k+1,\ldots,p}$ et $(z_i)_{i=k+1,\ldots,q}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{p} y_i \vec{f}_i + \sum_{i=k+1}^{q} z_i \vec{g}_i = \vec{0}. \tag{VI.2}$$

On en déduit que $\sum_{i=k+1}^{q} z_i \vec{g}_i = -\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{e}_i - \sum_{i=k+1}^{p} y_i \vec{f}_i$ est un élément de $F \cap G$: le membre de gauche de l'égalité est dans G, le membre de droite dans F. Notons $(t_1, \ldots, t_k)$ les coordonnées de ce vecteur dans la base $(e_i)_{i=1\ldots k}$ de $F \cap G$. On a donc, par (VI.2),

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i + t_i) \vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{p} y_i \vec{f}_i = \vec{0},$$

ce qui implique, la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_p)$ étant libre, que $y_{k+1} = \ldots = y_p = 0$. En revenant à (VI.2), on obtient

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{e}_i + \sum_{i=k+1}^{q} z_i \vec{g}_i = \vec{0},$$

ce qui montre, en utilisant que la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_{k+1}, \ldots, \vec{g}_q)$ est libre, que $x_1 = \ldots = x_k = z_{k+1} = \ldots = z_q = 0$. Finalement, tous les coefficients de la combinaison linéaire (VI.2) sont bien nuls, ce qui montre comme annoncé que la famille $\mathcal{A}$ est libre. $\square$

Exemple 2.12. Le théorème 2.10 donne une information "gratuite" (la dimension) pour calculer $F+G$. Considérons par exemple les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\}$ et $G = \operatorname{vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$. Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Pour cela, on remarque que $\dim F = 2$ (exemple 2.3), $\dim G = 2$ (G est engendré par une famille libre de dimension 2). De plus $\dim(F \cap G) = 1$. En effet, si $\vec{x} = (x,y,z) \in G$, alors $\vec{x}$ s'écrit $\lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1)$. De plus, $\vec{x} \in F \iff x = y \iff \mu = 0$. Donc $F \cap G = \operatorname{vect}\{(1,1,0)\}$ est bien de dimension 1. Par le théorème 2.10,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Par la proposition 2.5, $F + G = \mathbb{R}^3$.

2.c. Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

On connaît deux façons de décrire un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$: comme l'espace vectoriel engendré par une de ses bases, ou comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (on parle dans ce deuxième cas de *description par des équations cartésiennes*, ou simplement de *description cartésienne* de F). On explique ici comment passer d'une de ces écritures à l'autre.

Passer d'un système d'équations à une base

Soit (S) un système linéaire homogène sur $\mathbb{K}$ à n inconnues. L'ensemble F des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. La méthode du pivot de Gauss, vue au chapitre I du cours, permet de déterminer une base de F : on trouve, par cette méthode, un système sous forme échelonnée réduite (S') qui est équivalent à (S). Soit p' le nombre de lignes non nulles de (S'). D'après le chapitre I, on peut décrire l'ensemble F avec $n - p'$ paramètres (les variables libres du système). En mettant en facteur les variables libres dans cette description paramétrique, on obtient une base de (S') à $n - p'$ éléments. [1] L'espace vectoriel F est de dimension $n - p'$.

Considérons par exemple l'espace vectoriel

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x + 2y - t = 0 \text{ et } z + 2t = 0\right\}.$$

On veut trouver une base et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F. Celui-ci est décrit par un système linéaire qui est déjà sous forme échelonnée réduite. Les variables libres sont y et t, les variables de base x et z. L'ensemble F est donné par

$$F = \left\{(-2y+t, y, -2t, t),\ (y,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{y(-2,1,0,0) + t(1,0,-2,1),\ (y,t) \in \mathbb{R}^2\right),$$

ou encore

$$F = \operatorname{vect}\left\{(-2,1,0,0),(1,0,-2,1)\right).$$

La famille $\big((-2,1,0,0),(1,0,-2,1)\big)$ est une base de F.

1. Le fait que cette famille est libre résulte de la forme échelonnée de (S').

Passer d'une famille génératrice à un système d'équations

Soit maintenant F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ dont on connaît une famille génératrice $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_k})$. On cherche une description cartésienne de F. Soit $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. On écrit

$$\begin{aligned} \vec{x} \in F &\iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k,\ \lambda_1 \vec{f_1} + \ldots + \lambda_k \vec{f_k} = \vec{x} \\ &\iff \text{Le système } (S) : \lambda_1 \vec{f_1} + \ldots + \lambda_k \vec{f_k} = \vec{x}, \\ &\qquad \text{d'inconnues } \lambda_1, \dots, \lambda_k, \text{ est compatible.} \end{aligned}$$

On transforme alors, par la méthode du pivot, le système (S) en un système sous forme échelonnée réduite (S'). La compatibilité des systèmes (S) et (S') est équivalente à la nullité des membres de droite des lignes de (S') dont le membre de gauche est nul, ce qui donne un système linéaire sur les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ de $\vec{x}$, donc une description cartésienne de F.

Exemple 2.13. Soit $F = \operatorname{vect}\big\{(1,3,-4), (2,-1,-1)\big\}$. Alors

$$(x,y,z) \in F \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ t.q. } (S) \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\lambda - \mu = y \\ -4\lambda - \mu = z \end{cases}$$

Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) + 4(L_1)$, puis $(L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2)$, on obtient le système sous forme échelonnée réduite, équivalent au système (S) :

$$\text{(S')} \qquad \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -7\mu = y - 3x \\ 0 = x + y + z. \end{cases}$$

On voit que (S') admet une solution (λ, μ) si et seulement si $x + y + z = 0$, ce qui donne une description cartésienne de F :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\}.$$

Pour résumer :

Proposition 2.14. *Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ admet une description cartésienne. Si $p = \dim F$, F s'écrit comme l'ensemble des solutions d'un système homogène sous forme échelonnée réduite à n inconnues et $n - p$ équations.*

En particulier, une droite de $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système homogène sous forme échelonnée à $n-1$ équations. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n-1$ (un tel sous-espace vectoriel est appelé *hyperplan* de $\mathbb{K}^n$) s'écrit comme l'ensemble des solutions d'une seule équation linéaire homogène. En particulier, un plan de $\mathbb{R}^3$ peut toujours s'écrire comme l'ensemble des (x,y,z) tels que $ax + by + cz = 0$ pour un certain triplet de réels non tous nuls (a,b,c).

2.d. Manipulation de familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Calcul du rang d'une famille. Extraction d'une base

On rappelle que le *rang* d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour rechercher le rang de $\mathcal{F}$, il suffit donc de trouver une base de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$. La démonstration facile de la proposition suivante est laissée au lecteur :

Proposition 2.15. *Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ une famille de vecteurs de E. Soit $\mathcal{F}'$ une des familles suivantes :*

- *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en échangeant les vecteurs $\vec{e}_j$ et $\vec{e}_k$, où $j \neq k$.*
- *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en remplaçant le j-ième vecteur $\vec{e}_j$ par le vecteur $\vec{e}_j + \lambda \vec{e}_k$ où $j \neq k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
- *$\mathcal{F}'$ est la famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en remplaçant le j-ième vecteur $\vec{e}_j$ par le vecteur $\lambda \vec{e}_j$, où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Alors $\operatorname{vect} \mathcal{F} = \operatorname{vect} \mathcal{F}'$*.*

En d'autres termes, les opérations élémentaires sur les vecteurs (analogues des opérations élémentaires sur les lignes du chapitre I) ne changent pas $\operatorname{vect} \mathcal{F}$. Lorsque $E = \mathbb{K}^n$, on peut alors trouver une base de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ en appliquant la méthode du pivot de Gauss sur les éléments de $\mathcal{F}$, pour ramener $\mathcal{F}$ à une famille de vecteurs échelonnée, au sens de la définition suivante :

Définition 2.16. Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est dite *échelonnée* lorsque la matrice $p \times n$ obtenue en mettant à la i-ième ligne les coordonnées de $\vec{v}_i$ est échelonnée.

Il est facile de voir que le rang d'une famille de vecteurs échelonnée est égal au nombre de vecteurs non nuls de cette famille.

Exemple 2.17. Considérons la famille de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = \big((-1,-2,2,3), (0,-1,2,1), (1,1,0,0), (-1,0,-2,-2)\big)$. On applique la méthode du pivot à $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{cc} (-1,-2,2,3) & \\ (0,-1,2,1) & \\ (0,-1,2,3) & (L_3)+(L_1) \\ (0,2,-4,-5) & (L_4)-(L_1) \end{array} \quad \text{puis} \quad \begin{array}{cc} (-1,-2,2,3) & \\ (0,-1,2,1) & \\ (0,0,0,2) & (L_3)-(L_2) \\ (0,0,0,-3) & (L_4)+2(L_2) \end{array}$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc de même rang que la famille $\mathcal{F}' = \big((-1,-2,2,3), (0,-1,2,1), (0,0,0,2)\big)$, qui est une famille de vecteurs échelonnée. Donc $\mathcal{F}$ est de rang 3, et $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ a pour base $\mathcal{F}'$. On peut également remarquer que par construction de $\mathcal{F}'$, les trois premiers vecteurs de $\mathcal{F}$ engendrent $\operatorname{vect} \mathcal{F}'$ et donc que ces trois premiers vecteurs forment une base de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$, extraite de la famille $\mathcal{F}$.

Compléter une famille libre en une base

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ qui complète $\mathcal{F}$. Pour trouver une telle base, on peut "échelonner" la famille comme précédemment, à l'aide de la proposition 2.15, puis compléter par les vecteurs appropriés de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 2.18. La famille $\big((-1,-2,2,3),(0,-1,2,1),(0,0,0,2)\big)$ de $\mathbb{R}^4$, obtenue plus haut, est libre et échelonnée. Elle se complète de manière triviale en une base $\big((-1,-2,2,3),(0,-1,2,1),(0,0,1,0),(0,0,0,2)\big)$ de $\mathbb{R}^4$.

Exemple 2.19. La famille $\mathcal{F}=\big((1,3,2),(2,-2,3)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ est libre. Par l'opération $(L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_1)$, on obtient la famille échelonnée $\mathcal{F}'=\big((1,3,2),(0,-8,-1)\big)$, qui vérifie, par la proposition 2.15, $\operatorname{vect}\mathcal{F}=\operatorname{vect}\mathcal{F}'$. On complète la famille $\mathcal{F}'$ en une base $\big((1,3,2),(0,-8,-1),(0,0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $\big((1,3,2),(2,-2,3),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, qui complète $\mathcal{F}$.

3. Travaux dirigés

Exercice VI.1.

a. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + iy - z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Donner la dimension et une base de E.

b. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Donner la dimension et une base de E.

Exercice VI.2. On considère les sous-espaces vectoriels E, F, G et H de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y + 2z = 0\right\}, \quad F = \text{vect}\left((1,2,3); (-1,4,5)\right),$$

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0 \text{ et } y - z = 0\right\}, \quad H = \text{vect}\left((1,-1,2)\right).$$

Déterminer une base et la dimension de

$$F \cap G, \quad G \cap H, \quad E \cap H, \quad E \cap F$$

puis une base et la dimension de

$$F + G, \quad G + H, \quad E + H, \quad E + F.$$

Déterminer si les espaces F et G (respectivement G et H ; F et H ; E et F) sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice VI.3. Soit

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}, \quad F = \text{vect}\{(1,2,1,1)\}$$
$$G = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x_1 - x_4 = 0 \text{ et } -x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 3.1. Soit (S) un système linéaire homogène à 4 inconnues et 2 équations. L'ensemble H des solutions de (S) est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelles sont les dimensions possibles de H ? Donner un exemple de système correspondant à chacune de ces dimensions.

Exercice VI.4. Soit $\vec{u} = (1,1,-1)$, $\vec{v} = (-7,1,1)$ et F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Quelle est la dimension de F ?

b. Fixons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition sur (x, y, z) le système

$$a\vec{u} + b\vec{v} = (x, y, z),$$

d'inconnues réelles a et b est-il compatible ? En déduire une description cartésienne de F.

c. Déterminer par un raisonnement analogue une description cartésienne du sous-espace $\text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathbb{C}^4$ avec $\vec{u} = (i, i, 2, 0)$ $\vec{v} = (1, -1, 0, 2i)$.

Exercice VI.5.

a. Résoudre, selon le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} (\lambda + 2)x + y + 2z = 0 \\ x + (\lambda + 2)y + z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

b. Soit E_λ l'espace vectoriel des solutions de (S_λ). Déterminer, en distinguant selon les valeurs de λ, une base et la dimension de E_λ.

Exercice VI.6. Donner le rang des familles de vecteurs suivantes. En extraire une famille libre.

$$\mathcal{F}_1 = \Big((1,2), (2,4), (3,6), (0,0), (3,-4)\Big), \qquad \mathcal{F}_2 = \Big((1,-3,2), (-2,4,3), (-4,6,13)\Big),$$
$$\mathcal{F}_3 = \Big((1,\lambda,2), (\lambda,4,2), (0,0,3)\Big),$$

selon la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice VI.7. Montrer que les familles suivantes sont libres. Les compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ (respectivement de $\mathbb{R}^4$) :

$$\mathcal{F} = \{(-1,3,3), (1,2,-3)\}, \quad \mathcal{G} = \{(1,1,2,-1), (1,1,-1,2)\}.$$

Exercice VI.8. Soit $\vec{u}_1 = (-3,-1,-6)$, $\vec{u}_2 = (2,1,6)$, $\vec{u}_3 = (1,0,1)$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Exprimer les coordonnées d'un vecteur (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

4. Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice VI.9 (Question de cours)**.** Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Soit $\vec{v} \in E$. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\vec{v} \notin \operatorname{vect} \mathcal{F}$.

Exercice VI.10. Soit λ un paramètre réel. On considère les deux sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \operatorname{vect}\big((1,0,\lambda)\big), \quad G = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y - z = 0\Big\}.$$

Déterminer selon la valeur du paramètre λ une base et la dimensions de $F \cap G$ puis une base et la dimension de $F + G$. A quelle condition sur λ ces deux espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice VI.11. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u}_1 = (1,0,0,1), \quad \vec{u}_2 = (0,2,1,2), \quad \vec{u}_3 = (3,0,1,1).$$

En utilisant la méthode de l'exercice VI.4, donner une description cartésienne du sous-espace de $\mathbb{R}^4$: $F = \operatorname{vect}\big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\big)$.

VII. Applications linéaires

Référence pour ce chapitre : Liret & Martinais [1].

On notera comme d'habitude $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une application linéaire est une application d'un espace vectoriel dans un autre qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel. Une base de l'espace vectoriel de départ et une base de l'espace vectoriel d'arrivée étant données, ces applications linéaires s'identifient aux matrices, vues au chapitre II, la composition des applications s'identifiant au produit matriciel. La partie 1 de ce chapitre est consacrée à des définitions et des propriétés élémentaires, la partie 2 à la correspondance entre les applications linéaires et les matrices. En 3, on définit des opérations sur les applications linéaires et on identifie ces opérations aux opérations matricielles. La suite du chapitre est consacrée au lien des applications linéaires avec les objets étudiés aux chapitres V et VI : bases, sous-espaces vectoriels, dimension.

1. Définitions et premières propriétés

1.a. Définitions et exemples

Soit E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On notera $\vec{0}_E$ (respectivement $\vec{0}_F$) le vecteur nul de E (respectivement F).

Définition 1.1. Soit f une application de E dans F. On dit que f est une *application linéaire* de E dans F quand les deux conditions suivantes sont respectées :

$$\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \tag{VII.1}$$

$$\forall \vec{x} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}). \tag{VII.2}$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Une application linéaire de E dans E est appelée *endomorphisme* de E. On note pour simplifier $\mathcal{L}(E)$ (au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples 1.2.
i. Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'application $h_\lambda : \vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$ est un endomorphisme de E, appelée *homothétie* de rapport λ. L'application h_1 est simplement l'identité de E.

ii. L'application constante nulle, $\vec{x} \mapsto \vec{0}_F$ est une application linéaire de E dans F, notée $0_{E\to F}$ ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, 0.

iii. L'application f définie par $f\big((x,y)\big) = 3x - 4y$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La même formule définit une application linéaire de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$.

iv. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet,
$$f(2\times 1) = f(2) = 8 \text{ mais } 2f(1) = 2 \neq 8.$$

v. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation R_θ de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle θ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet, on a la formule (à vérifier) :
$$R_\theta\big((x,y)\big) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta),$$
dont on déduit facilement le résultat annoncé. Voir aussi l'exercice 1.5 plus loin.

Remarque 1.3. Si f est une application définie sur $\mathbb{R}^n$, l'image d'un vecteur $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $f\big((x_1,\ldots,x_n)\big)$, avec deux paires de parenthèses : les parenthèses extérieures signifient "l'image par f", les parenthèses intérieures sont celles apparaissant dans l'écriture du n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$. Il est d'usage, pour alléger les notations, d'omettre de doubler les parenthèses. Par souci de rigueur, nous utiliserons systématiquement dans ce cours la notation avec les parenthèses doublées.

1.b. Quelques propriétés

Proposition 1.4. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.*

Démonstration.
$$f(\vec{0}_E) = f(0\times\vec{0}_E) = 0f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$
□

Exercice 1.5. Soit M un point du plan $\mathbb{R}^2$, différent de l'origine $(0,0)$, et $\theta \in (0,2\pi)$. La rotation f de $\mathbb{R}^2$ de centre M et d'angle θ est-elle une application linéaire ?

(cf correction p. 80).

Proposition 1.6. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k$ des éléments de E. Alors*
$$f(\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{u}_k) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + \lambda_k f(\vec{u}_k).$$

Démonstration. Si $k = 2$, on démontre la formule en utilisant successivement les conditions (VII.1) et (VII.2) de la définition 1.1 :
$$f(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2) = f(\lambda_1\vec{u}_1) + f(\lambda_2\vec{u}_2) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \lambda_2 f(\vec{u}_2).$$
Le cas général se démontre par récurrence sur k. □

[1] François Liret et Dominique Martinais. *Algèbre 1ère année - Cours et exercices avec solutions.* Dunod, deuxième édition, 2003

Corollaire 1.7. *On suppose E de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E, et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ des vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéraire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\forall j = 1 \dots n, \quad f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j. \tag{VII.3}$$

Démonstration. Supposons que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie (VII.3). Soit $\vec{x}$ un élément de E et $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors par la proposition 1.6

$$f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n) = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n, \tag{VII.4}$$

ce qui montre l'unicité de f vérifiant (VII.3). Pour montrer l'existence, il suffit de définir f par la formule (VII.4), ce qui a un sens puisque $\mathcal{B}$ est une base de E. On vérifie aisément que l'application obtenue est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$. □

Exemple 1.8. Soit $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (1, 4)$. Alors il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(\vec{u}) = (-1, 2, 3)$, $f(\vec{v}) = (0, 0, 0)$.

Exercice 1.9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f\big((x, y)\big)$ où f est l'application de l'exemple précédent. (Correction p. 80).

2. Applications linéaires et matrices

2.a. Matrice de représentation d'une application linéaire

On montre ici que sur les espaces vectoriels de dimension finie [2], une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée étant données, une application linéaire s'identifie à une matrice.

On rappelle que les n coordonnées d'un vecteur dans une base d'un espace vectoriel de dimension n sont toujours notées en colonnes, et considérées comme une matrice $n \times 1$. Par exemple, les coordonnées d'un élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont notées :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Définition 2.1. Soit E, F des espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La *matrice de représentation de* f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (ou plus simplement *matrice* de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$), notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est la matrice $p \times n$ dont le coefficient (i, j) est donné par la i-ème coordonnée de $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. En d'autres termes, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est donnée par les coordonnées de $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

2. On rappelle que nous étudions principalement dans ce cours les sous espaces-vectoriels de $\mathbb{K}^n$, qui sont tous des espaces vectoriels de dimension finie.

Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ étant fixées, on montre facilement (en utilisant le Corollaire 1.7) que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. En d'autres termes, l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est une bijection [3]. Il est donc équivalent de considérer les applications linéaires de E dans F et les matrices $p \times n$. Le point de vue "application linéaire" est intrinsèque : il ne dépend pas du choix de bases de E et F. Le point de vue matriciel n'a pas cette propriété, mais est plus adapté aux calculs explicites.

2.b. Exemple : cas des bases canoniques

Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Alors, en notant $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} f\big((x_1, x_2, \dots, x_n)\big) &= f(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = \sum_{j=1}^n x_j f(\vec{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{p,j}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{p,j}x_j \right). \end{aligned} \tag{VII.5}$$

On peut donc facilement reconnaître une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$: chacune de ses coordonnées dans $\mathbb{K}^p$ est donnée, comme dans (VII.5), par une combinaison linéaire de coordonnées dans $\mathbb{K}^n$. De plus, on lit sur cette formule les coefficients de la matrice de l'application linéaire dans les bases canoniques.

Exemple 2.2. La formule

$$\begin{aligned} &f\big((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\big) \\ &\quad = (\pi x_1 + 4x_3 + x_5, ix_3 + \sqrt{2}x_4 + x_5, -x_1 + x_2, x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4) \end{aligned} \tag{VII.6}$$

qui dit que les coordonnées de $f\big((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\big)$ dans la base canonique sont :

$$\begin{bmatrix} \pi x_1 + 4x_3 + x_5 \\ ix_3 + \sqrt{2}x_4 + x_5 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \end{bmatrix} \tag{VII.7}$$

définit une application linéaire de $\mathbb{C}^5$ dans $\mathbb{C}^4$. Sa matrice dans les bases canoniques

3. cf 4.c p. 73 pour un rappel sur les bijections.

(qui se lit sur la formule (VII.7)) est :

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple 2.3. La matrice de représentation de la rotation R_θ de centre 0 et d'angle θ (cf Exemple 1.2, v) est :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2.c. Cas général

Donnons un exemple de calcul de matrice de représentation dans des bases autres que les bases canoniques.

Exemple 2.4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ défini par

$$f\big((x_1, x_2)\big) = \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2, -x_1 + x_2). \tag{VII.8}$$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, où

$$\vec{u}_1 = (-1, 1), \quad \vec{u}_2 = (1, 1), \quad \vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 0), \quad \vec{v}_3 = (1, 0, 0).$$

On vérifie facilement que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Calculons

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

La formule (VII.8) nous donne :

$$f(\vec{u}_1) = (1, 1, 1) = \vec{v}_1, \quad f(\vec{u}_2) = (2, 4, 0) = 2\vec{v}_2.$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que cette matrice est complètement différente de la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, qui se lit sur la formule (VII.8).

Dans cet exemple, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est beaucoup plus simple que sa matrice dans les bases canoniques. On voit ici l'intérêt que peut représenter le choix d'une autre base que la base canonique pour écrire la matrice d'une application linéaire.

Comme le montre l'exemple précédent, le calcul de la matrice de représentation d'une application linéaire f dans les bases $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ se décompose en deux étapes :

— le calcul de $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)$;
— le calcul des coordonnées de $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)$ dans la base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$: soit, en général, la résolution de n systèmes de Cramer, chacun à p équations et p inconnues. Dans l'exemple précédent, ce calcul était immédiat.

Il est aussi possible de déterminer la matrice de représentation de f par des calculs matriciels, à l'aide de la formule de changement de bases qui n'est pas au programme du cours cette année mais est donnée en complément (cf partie 6).

2.d. Un exemple de changement de base

Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On se donne deux bases de E, $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ et deux bases de F, $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$. Peut-on exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ en fonction de $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$? La formule de changement de bases (cf partie 6), hors programme cette année, permet de répondre à cette question. On peut aussi le faire par des calculs directs. On donne ici un exemple d'un tel calcul.

On suppose $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\widetilde{\mathcal{B}} = (\vec{\tilde{u}}_1, \vec{\tilde{u}}_2)$, $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, $\widetilde{\mathcal{C}} = (\vec{\tilde{v}}_1, \vec{\tilde{v}}_2, \vec{\tilde{v}}_3)$ avec

$$\vec{u}_1 = (1, 1), \quad \vec{u}_2 = (1, -1), \qquad \vec{\tilde{u}}_1 = (1, 1), \quad \vec{\tilde{u}}_2 = (1, 0)$$

et

$$\begin{aligned} &\vec{v}_1 = (1, -1, 0), && \vec{v}_2 = (1, 1, 0), && \vec{v}_3 = (0, 0, 1), \\ &\vec{\tilde{v}}_1 = (1, 0, 0), && \vec{\tilde{v}}_2 = (1, 1, 0), && \vec{\tilde{v}}_3 = (1, 0, 1). \end{aligned}$$

On suppose de plus

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

On chercher à calculer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$.

Première étape. On commence par calculer $f(\vec{\tilde{u}}_1)$ et $f(\vec{\tilde{u}}_2)$. Puisqu'on connaît $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$, il suffit de trouver les coordonnées de $\vec{\tilde{u}}_1$ et $\vec{\tilde{u}}_2$ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\vec{\tilde{u}}_1 = \vec{u}_1 \text{ et } \vec{\tilde{u}}_2 = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2$$

(la deuxième égalité s'obtient par résolution du système $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 0$). Donc, en utilisant l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$,

$$f(\vec{\tilde{u}}_1) = f(\vec{u}_1) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3,$$
$$f(\vec{\tilde{u}}_2) = \frac{1}{2}f(\vec{u}_1) + \frac{1}{2}f(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\left(-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3\right) = \vec{v}_2 + \frac{5}{2}\vec{v}_3.$$

Deuxième étape. On a obtenu les coordonnées de $f(\vec{\tilde{u}}_1)$ et $f(\vec{\tilde{u}}_2)$ dans la base $\mathcal{C}$. On a besoin des coordonnées de ces vecteurs dans la base $\widetilde{\mathcal{C}}$. Il suffit pour cela d'écrire les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ en fonction de $\vec{\tilde{v}}_1$, $\vec{\tilde{v}}_2$ et $\vec{\tilde{v}}_3$. En résolvant pour chaque vecteur un système linéaire (dans ce cas précis, échelonné) de trois équations à trois inconnues, on obtient

$$\vec{v}_1 = 2\vec{\tilde{v}}_1 - \vec{\tilde{v}}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{\tilde{v}}_2, \quad \vec{v}_3 = -\vec{\tilde{v}}_1 + \vec{\tilde{v}}_3.$$

D'où, en utilisant la première étape,

$$f(\vec{\tilde{u}}_1) = -(2\vec{\tilde{v}}_1 - \vec{\tilde{v}}_2) + 2\vec{\tilde{v}}_2 + 3(\vec{\tilde{v}}_3 - \vec{\tilde{v}}_1) = -5\vec{\tilde{v}}_1 + 3\vec{\tilde{v}}_2 + 3\vec{\tilde{v}}_3,$$

et

$$f(\vec{\tilde{u}}_2) = \vec{\tilde{v}}_2 + \frac{5}{2}(-\vec{\tilde{v}}_1 + \vec{\tilde{v}}_3) = -\frac{5}{2}\vec{\tilde{v}}_1 + \vec{\tilde{v}}_2 + \frac{5}{2}\vec{\tilde{v}}_3.$$

On en déduit

$$\operatorname{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{C}}}(f) = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

2.e. Applications linéaires et multiplication par une matrice

La proposition suivante donne une interprétation plus concrète de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Proposition 2.5. *Sous les conditions de la définition 2.1, on se donne un vecteur $\vec{x}$ de E de coordonnées $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$ les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{C}$. Alors*

$$Y = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\, X.$$

Démonstration. Notons $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n) &= x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_n f(\vec{u}_n) \\ &= x_1\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,1}\vec{v}_i\right) + x_2\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,2}\vec{v}_i\right) + \ldots + x_n\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,n}\vec{v}_i\right) \end{aligned}$$

En regroupant les termes de la dernière ligne de l'inégalité précédente, on voit que pour $i = 1 \ldots p$, la coordonnée y_i de $\vec{v}_i$ est donnée par

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j,$$

ce qui signifie bien que $Y = AX$ au sens du produit matriciel. □

Exemple 2.6. Reprenons l'application linéaire f de l'exemple 2.4. Les coordonnées de $f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ dans la base $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ sont données par le produit matriciel :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En d'autres termes :

$$f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

Exemple 2.7. L'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f\big((x_1, x_2)\big) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2)$ associe, à un vecteur de coordonnées X dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, le vecteur de coordonnées AX dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Opérations sur les applications linéaires

3.a. Addition et multiplication par un scalaire

Définition 3.1. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mu \in \mathbb{K}$. On définit les applications $f + g$ et μf de E dans F par :

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad (\mu f)(\vec{x}) = \mu f(\vec{x}).$$

Dans les deux égalités de la ligne précédente, l'addition et la multiplication par un scalaire apparaissant dans le membre de droite de chaque égalité sont l'addition et la multiplication par un scalaire de l'espace vectoriel F.

Proposition 3.2. *Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mu \in \mathbb{K}$, les applications $f + g$ et μf données par la définition 3.1 sont des éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de E. En utilisant successivement la définition de $f + g$, la linéarité de f et g, la commutativité de l'addition sur F puis à nouveau la définition de $f + g$, on obtient :

$$\begin{aligned} (f + g)(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) + g(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{x}) + g(\vec{y}) \\ &= f(\vec{x}) + g(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{y}) = (f + g)(\vec{x}) + (f + g)(\vec{y}). \end{aligned}$$

De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(f + g)(\lambda\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) + g(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x}) = \lambda(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = (\lambda(f + g))(\vec{x}).$$

Donc $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$. La démonstration du fait que μf est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ si $\mu \in \mathbb{K}$ est très proche et laissée au lecteur. □

Remarque 3.3. On montre aisément que l'addition et la multiplication par un scalaire ainsi définies sur $\mathcal{L}(E, F)$ lui confèrent une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Cette propriété ne sera pas utilisée spécifiquement dans ce cours, mais doit être retenue.

Exemple 3.4. Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définis par

$$f\big((x_1, x_2)\big) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0), \quad g\big((x_1, x_2)\big) = (x_2 - 2x_1, 0, x_2).$$

Alors :

$$(2f)\big((x_1, x_2)\big) = (4x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2, 0)$$

et

$$(f + g)\big((x_1, x_2)\big) = (0, x_1 + x_2, x_2).$$

3.b. Composition

On rappelle que si E, F et G sont des ensembles, f est une application de E dans F et g est une application de F dans G, la *composée* de f et g, noté $g \circ f$, est définie par

$$\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

C'est une application de E dans G :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Proposition 3.5. *Soient E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.*

Démonstration. Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En utilisant la linéarité de f, puis celle de g,

$$g\circ f(\vec{x}+\vec{y}) = g(f(\vec{x}+\vec{y})) = g(f(\vec{x})+f(\vec{y})) = g(f(\vec{x}))+g(f(\vec{y})) = (g\circ f)(\vec{x})+(g\circ f)(\vec{y}).$$

et

$$g \circ f(\lambda\vec{x}) = g(f(\lambda\vec{x})) = g(\lambda f(\vec{x})) = \lambda(g \circ f(\vec{x})).$$

□

Exercice 3.6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ donnés par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ et $g(x) = (x, -2x, 3x)$. Calculer $g \circ f$.

(correction p. 80).

Exercice 3.7. On note R_θ la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre $\vec{0}_{\mathbb{R}^2}$. Soit $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$. Déterminer $R_\theta \circ R_\sigma$.

Quelle est la composée de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ d'axe Ox et de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ d'axe Oy ?

(correction p. 80).

3.c. Effet des opérations sur les matrices

Les opérations sur les applications linéaires se traduisent facilement en terme de matrices de représentations :

Proposition 3.8. *i. Soit E, F des espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base F. Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f_1) + \mu \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f_2).$$

ii. Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des bases de respectivement E, F et G. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Le point (ii) signifie que la composition des applications se traduit par le produit matriciel de leurs matrices de représentations. Remarquons que le produit matriciel de la dernière ligne de la proposition est bien défini : si $n = \dim E$, $p = \dim F$ et $q = \dim G$, le premier facteur du membre de droite est une matrice $q \times p$, le deuxième une matrice $p \times n$. Le produit obtenu est bien une matrice $q \times n$.

Avertissement 3.9. Attention à l'ordre des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans le terme de droite de la formule du point (ii).

Démonstration. Nous ne démontrerons que le point (ii). La preuve (plus facile) du point (i) est laissée au lecteur.

On note n, p et q les dimensions respectives des espaces vectoriels E, F et G. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $\vec{x}$ le vecteur de E de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de $f(\vec{x}) \in F$ dans la base $\mathcal{C}$, et $Z \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de $g \circ f(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) \in G$ dans la base $\mathcal{D}$. Par la proposition 2.5, appliquée successivement à f, g et $g \circ f$

$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X, \quad Z = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X$$

et

$$Z = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)X.$$

On en déduit

$$\text{(VII.9)} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)X,$$

ce qui montre l'égalité

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f).$$

En effet, pour passer de (VII.9) à cette dernière ligne, il suffit d'appliquer (VII.9) aux matrices colonnes $X = E_1, \dots, X = E_n$, où E_j est le vecteur colonne $[\delta_{i,j}]_{i=1,\dots,n}$, c'est à dire le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf le j-ième qui vaut 1. □

Remarque 3.10. Le (ii) justifie a posteriori la définition du produit matriciel.

Exercice 3.11. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$. On se donne deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ ont pour matrices de représentation :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)$.

b. La matrice AB est-elle la matrice de représentation d'une certaine application linéaire dans des bases que l'on précisera ?

(cf correction p. 81)

Exercice 3.12. Soit, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Exprimer, pour $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$, la matrice $M_\theta M_\sigma$ en fonction d'une certaine matrice M_ρ (ρ à déterminer). Comparer avec l'exercice 1.5.

4. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

4.a. Rappels

Commençons par rappeler quelques définitions :

Définition 4.1. Soit f une application de E dans F, où E et F sont des ensembles.

i. Si $A \subset E$, l'*image* de A par f, notée $f(A)$, est le sous-ensemble de F :

$$f(A) = \Big\{ f(a),\ a \in A \Big\} = \Big\{ b \in F \text{ t.q. } \exists a \in E,\ b = f(a) \Big\}.$$

ii. Si $B \subset F$, l'*image réciproque*[4] de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est le sous-ensemble de E :

$$f^{-1}(B) = \{ a \in E \text{ t.q. } f(a) \in B \}.$$

iii. On dit que f est *injective* lorsque chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ, i.e :

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y,$$

ou de manière équivalente :

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

(deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes).

iv. On dit que f est *surjective* lorsque chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ, i.e. lorsque $f(E) = F$.

v. On dit que f est *bijective* lorsqu'elle est injective et surjective. C'est à dire :

$$\forall z \in F,\ \exists! x \in E,\ \text{t.q. } z = f(x).$$

On appelle *injection*, *surjection*, *bijection* une application injective (respectivement surjective, bijective).

Exercice 4.2. Soit f une application linéaire de E dans F. Soit $y \in F$. Que dire de $f^{-1}(\{y\})$ si f est injective (respectivement surjective, bijective) ?

(réponse p. 81).

Remarque 4.3. Il découle immédiatement de la définition d'une bijection qu'une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si elle admet une *application réciproque*, i.e. une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Cette application est notée f^{-1}.

Avertissement 4.4. La notation f^{-1} désigne l'inverse d'une application inversible, mais est aussi utilisée pour désigner l'image réciproque $f^{-1}(F)$ d'un ensemble F, *même lorsque f n'est pas inversible*. Remarquons que lorsque f n'est pas inversible, on n'a pas toujours $f(f^{-1}(B)) = B$ ou $f^{-1}(f(A)) = A$ (cf l'exercice 4.6).

Avertissement 4.5. L'injectivité d'une application dépend du choix de l'ensemble de départ. Sa surjectivité et sa bijectivité des choix de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée (cf de nouveau l'exercice 4.6).

Exercice 4.6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$. Calculer , $f^{-1}(]-\infty, 0[)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}([0, +\infty[)$, $f(\mathbb{R})$, $f([0, +\infty[)$, puis $f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right)$ et $f^{-1}\left(f([0, +\infty[)\right)$. La fonction f est-elle surjective (respectivement injective, bijective) lorsqu'elle est considérée :

i. comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

ii. comme une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$?

iii. comme une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$?

iv. comme une application de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$?

(Réponse p. 81).

4.b. Image et noyau d'une application linéaire

Définition 4.7. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'image $f(E)$ de E par f est appelée *image de f* et notée $\mathrm{Im}(f)$. L'image réciproque $f^{-1}(\{\vec{0}_F\})$ de $\{\vec{0}_F\}$ par f est appelée *noyau de f* et notée[5] $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Le lecteur pressé pourra faire l'impasse en première lecture sur cette notion d'image réciproque, qui sera surtout utilisée dans la suite pour définir le noyau d'une application linéaire (cf la remarque 4.8 plus bas qui donne une définition du noyau sans utiliser cette notion explicitement).

5. de l'allemand *Kern* signifiant noyau. La traduction anglaise de noyau (au sens mathématique) est *kernel*.

Remarque 4.8. En d'autres termes, l'image de f est l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in F \text{ t.q. } \exists \vec{x} \in E,\ \vec{y} = f(\vec{x})\},$$

et le noyau de f est l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{x} \in E \text{ t.q. } f(\vec{x}) = \vec{0}_F\right\}.$$

Théorème 4.9. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

i. L'image d'un sous-espace vectoriel de E par f est un sous-espace vectoriel de F.

ii. L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par f est un sous-espace vectoriel de E.

En particulier, le noyau et l'image de f sont des sous-espaces vectoriels (de E et F respectivement).

Démonstration. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors $\vec{0}_E \in G$, donc $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E) \in f(G)$.

Soit maintenant $\vec{u}, \vec{v} \in f(G)$. Par définition de $f(G)$, il existe des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de G tels que $\vec{u} = f(\vec{x})$ et $\vec{v} = f(\vec{y})$. On a

$$\vec{u} + \vec{v} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}).$$

Puisque G est un sous-espace vectoriel de E, $\vec{x} + \vec{y} \in G$ et on déduit de l'égalité précédente $\vec{u} + \vec{v} \in f(G)$.

Si de plus $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda\vec{x} \in G$ et donc

$$\lambda\vec{u} = \lambda f(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) \in f(G),$$

ce qui achève de montrer que $f(G)$ est bien un sous-espace vectoriel de F.

Montrons maintenant le deuxième point. Soit H un sous-espace vectoriel de F. Alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in H$, et donc $\vec{0}_E \in f^{-1}(H)$. De plus, si $\vec{u}, \vec{v} \in f^{-1}(H)$. Alors

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),$$

et puisque $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ sont dans H et H est un sous-espace vectoriel de F, $f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \in H$, ce qui montre que $\vec{u} + \vec{v} \in f^{-1}(H)$.

Enfin, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} \in f^{-1}(H)$, alors $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ est un élément de H puisque $f(\vec{u})$ est un élément de H. Donc $\lambda\vec{u} \in f^{-1}(H)$. On a bien démontré que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 4.10. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{t.q. } x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0\right\}.$$

Alors A est le noyau de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par

$$f\big((x, y, z)\big) = (x + y + z, x - 2y).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p équations et n inconnues est le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$: on retrouve ainsi que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4.11. Soit B le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Alors B est l'image de l'application linéaire $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2).$$

Donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Remarquons que

$$B = \mathrm{vect}\Big((1, 1, 2), (1, -1, 1)\Big).$$

Exercice 4.12. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé des triplets $(x_1+x_2, x_3-x_4, x_1-x_3)$, où $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(cf solution p. 81).

4.c. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Théorème 4.13. *Soit E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

i. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

ii. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

Démonstration. Le point (i) découle immédiatement de la définition de la surjectivité et de celle de l'image d'une application linéaire.

Démontrons (ii).

Supposons f injective. On sait que $\vec{0}_E$ est un élément de $\mathrm{Ker}(f)$. Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$, et donc par injectivité $\vec{x} = \vec{0}_E$. D'où $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

Réciproquement, on suppose $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de E tels que $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$. Alors

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}_F,$$

donc $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}(f)$, et, puisque $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_E$. On a bien montré que f était injective. □

Exemple 4.14. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ définie par

$$f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 2x_3, 4x_3).$$

Alors f est injective. En effet, si $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker}(f)$, on a $x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - 2x_3 = 4x_3 = 0$, dont on déduit facilement $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

On peut également caractériser l'injectivité ou la surjectivité d'une application par des propriétés de l'image d'une base de l'espace de départ.

Proposition 4.15. *Soit E et F des espaces vectoriels. On suppose E de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

i. La famille $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ engendre $\operatorname{Im}(f)$. En particulier, l'application f est surjective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de F.

ii. L'application f est injective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une famille libre.

Démonstration. Montrons seulement le point (i). Le point (ii) sera démontré en travaux dirigés (cf exercice VII.10 p. 83).

Les vecteurs $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$ sont bien dans $\operatorname{Im}(f)$. De plus, un vecteur $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f)$ s'écrit $f(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in E$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \quad \vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n),$$

ce qui montre bien

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)).$$

On en déduit immédiatement :

$$f \text{ surjective} \iff \operatorname{Im}(f) = F \iff \operatorname{vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)) = F,$$

□

4.d. Rang d'une application linéaire

On rappelle que le *rang* d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{vect}\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{F}$.

Définition 4.16. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Le *rang* de f, noté $\operatorname{rg}(f)$, est la dimension de l'image de f. Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}$, le rang de A est le rang de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Remarque 4.17. D'après le point (i) de la proposition 4.15, si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E, le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est égal au rang de la famille de vecteurs

$$(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)).$$

Il est donc inférieur à la dimension n de E. De même, le rang d'une matrice A est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes (mis en ligne et considérés comme des vecteurs de $\mathbb{R}^p$).

Remarque 4.18. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors le rang de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est égal au rang de l'application linéaire f. En particulier, ce nombre est indépendant du choix des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Nous démontrerons cette propriété plus loin : cf remarque 5.19.

Exemple 4.19. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2(x_1 + 2x_2 + x_3), -(x_1 + 2x_2 + x_3)\big).$$

Alors $f(1,0,0) = (1,2,-1)$, $f(0,1,0) = (2,4,-2)$ et $f(0,0,1) = (1,2,-1)$. Donc

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\big((1,2,-1),(2,4,-2),(1,2,-1)\big) = 1.$$

Le rang d'une application linéaire et la dimension de son noyau sont liés par le résultat suivant :

Théorème 4.20 (Théorème du rang)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des espaces vectoriels. Alors*

$$\operatorname{rg}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim E.$$

Démonstration. Soit k la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$, et ℓ la dimension de $\operatorname{Im} f$. On doit montrer

$$\dim E = k + \ell.$$

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_\ell)$ une base de $\operatorname{Im} f$. Il existe donc, pour $j = 1 \dots \ell$, un vecteur $\vec{w}_j \in E$ tel que $f(\vec{w}_j) = \vec{v}_j$. Montrons que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell)$ est une base de E (ce qui impliquera immédiatement le résultat annoncé).

Montrons d'abord que $\mathcal{B}$ engendre E. Soit $\vec{x} \in E$. Puisque $f(\vec{x}) \in \operatorname{Im} f$ et $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell$ est une base $\operatorname{Im} f$, il existe $(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \in \mathbb{K}^\ell$ tels que

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{v}_1 + \ldots + y_\ell\vec{v}_\ell.$$

On en déduit

$$f(\vec{x}) = y_1 f(\vec{w}_1) + \ldots + y_\ell f(\vec{w}_\ell) = f(y_1\vec{w}_1 + \ldots + y_\ell\vec{w}_\ell),$$

et donc

$$\vec{x} - y_1\vec{w}_1 - \ldots - y_\ell\vec{w}_\ell \in \operatorname{Ker}(f).$$

Il existe donc $(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{K}^k$ tels que
$$\vec{x}-y_1\vec{w}_1-\dots-y_\ell\vec{w}_\ell=x_1\vec{u}_1+\dots+x_k\vec{u}_k,$$
soit
$$\vec{x}=y_1\vec{w}_1+\dots+y_\ell\vec{w}_\ell+x_1\vec{u}_1+\dots+x_k\vec{u}_k.$$
La famille $\mathcal{B}$ engendre bien E.

Montrons maintenant que $\mathcal{B}$ est libre. On suppose que l'on a

$$x_1\vec{u}_1+\dots+x_k\vec{u}_k+y_1\vec{w}_1+\dots+y_\ell\vec{w}_\ell=\vec{0}_E \tag{VII.10}$$

avec $(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_\ell)\in\mathbb{K}^{k+\ell}$. En appliquant f à la ligne précédente et en utilisant que $f(\vec{u}_j)=\vec{0}_F$ pour $j=1\dots k$ et $f(\vec{w}_j)=\vec{v}_j$ pour $j=1\dots\ell$, on obtient
$$y_1\vec{v}_1+y_2\vec{v}_2+\dots+y_\ell\vec{v}_\ell=f(\vec{0}_E)=\vec{0}_F.$$
On en déduit, puisque la famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_\ell)$ est libre :
$$y_1=y_2=\dots=y_\ell=0.$$
En revenant à (VII.10), et en utilisant que la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_k)$ est libre, on obtient
$$x_1=x_2=\dots=x_k=0,$$
ce qui montre que $\mathcal{B}$ est libre et termine la preuve du théorème du rang. □

Exemple 4.21. Soit $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^5$ définie par
$$f\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big)=(x_1+x_2,x_1-x_2,2x_1+x_2,x_3+x_4,x_3-x_4).$$
On veut déterminer le rang de f.

On calcule pour cela la dimension du noyau de f.
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\operatorname{Ker}(f)\iff x_1+x_2=x_1-x_2=2x_1+x_2=x_3+x_4=x_3-x_4=0.$$
On résout facilement ce système linéaire homogène de 5 équations :
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\operatorname{Ker}(f)\iff x_1=x_2=x_3=x_4=0.$$
Donc $\operatorname{Ker}(f)=\{(0,0,0,0)\}$. Le noyau de f est de dimension 0. Par le théorème du rang,
$$\operatorname{rg}(f)=\dim\mathbb{R}^4-\dim\operatorname{Ker}(f)=4-0=4.$$
Remarque 4.22. On peut souvent utiliser le théorème du rang et des arguments de dimension pour étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire. Reprenons l'application injective f de l'exemple 4.14 p. 74. Le théorème du rang s'écrit :
$$\operatorname{rg}(f)+\underbrace{\dim\operatorname{Ker}(f)}_{0}=\underbrace{\dim\mathbb{C}^3}_{3},$$
et donc $\operatorname{rg}(f)=3$. On en déduit que $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{C}^3$, c'est donc exactement $\mathbb{C}^3$. Donc f est surjective, et par conséquent bijective. On voit ici, comme dans l'exemple 4.21, que la dimension donne une information gratuite et facilement exploitable.

4.e. Retour sur les systèmes linéaires

L'image et le noyau d'une application linéaire s'interprètent en terme de systèmes linéaires. On considère un système linéaire non-homogène à p équations et n inconnues :

$$\forall i\in\{1,\dots,p\},\quad \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j=b_i \tag{S}$$

et le système linéaire homogène correspondant :

$$\forall i\in\{1,\dots,p\},\quad \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j=0. \tag{H}$$

On fixe les coefficients $a_{i;j}$. Soit f l'application linéaire $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^p$ de matrice $[a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Alors l'ensemble F des solutions de (H) est le noyau $\operatorname{Ker} f$ de f. Notons G le sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$ formé des $(b_1,\dots,b_p)$ tel que (S) a au moins une solution. Dire que $(b_1,\dots,b_p)$ est un élément de G signifie exactement qu'il existe $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $f\big((x_1,\dots,x_n)\big)=(b_1,\dots,b_p)$. En d'autres termes, G est l'image de f : c'est en particulier un espace vectoriel.

Si $(b_1,\dots,b_p)\in G$, le système (S) est compatible. Fixons en une solution $\vec{y}$. Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) s'écrit :

$$\mathcal{S}=\{\vec{y}+\vec{x},\quad \vec{x}\in F\}, \tag{VII.11}$$

En effet, on voit facilement que $\vec{x}$ est solution de (S) si et seulement si $\vec{x}-\vec{y}$ est solution de (H), ce qui donne exactement (VII.11).

Le théorème du rang nous donne la relation suivante :
$$\dim F+\dim G=n.$$
Notons q la dimension de F. L'identité (VII.11) signifie que si (S) est compatible, on peut décrire l'ensemble des solutions avec exactement q paramètres. Ce nombre q est par définition indépendant du second membre $(b_1,\dots,b_p)$ (seule la compatibilité du système dépend de ce second membre). Rappelons (cf chapitre I), que $q=n-p'$, où p' est le nombre de lignes non nulles [6] que l'on obtient lorsque l'on échelonne le système (S) par la méthode du pivot de Gauss. Le théorème du rang implique que p' est exactement la dimension de G, l'image de f. Ce nombre est appelé rang du système linéaire.

Exemple 4.23. Considérons la famille de systèmes, d'inconnues $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x_1-x_2=b_1\\ x_1+x_2=b_2\\ 2x_1+x_2=b_3.\end{cases} \tag{S}$$

6. C'est à dire autres que $0=0$.

Ici $n=2$, $p=3$. Il est facile de voir que le système homogène n'a que la solution nulle $(0,0)$. Donc $F=\{\vec{0}\}$ est de dimension 0. L'espace vectoriel G formé des (b_1,b_2,b_3) tels que (S) est compatible est de dimension $2-0=2$. Lorsque $(b_1,b_2,b_3)\in G$, le système (S) a une unique solution. Il est facile de déterminer G en échelonnant le système (S). Par les opérations $(L_2)\leftarrow(L_2)-(L_1)$, $(L_3)\leftarrow(L_3)-2(L_1)$, puis $(L_3)\leftarrow(L_3)-\frac{3}{2}(L_2)$, on obtient le système équivalent

$$\text{(S')}\qquad \begin{cases} x_1-x_2=b_1\\ \quad 2x_2=b_2-b_1\\ \quad\ \ 0=b_3-\dfrac{3}{2}b_2-\dfrac{1}{2}b_1.\end{cases}$$

On en déduit que $q=0$, $p'=2$ et que (S) est compatible si et seulement si $2b_3-3b_2-b_1=0$, ce qui donne la représentation cartésienne de G :

$$G=\Big\{(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2b_3-3b_2-b_1=0\Big\}.$$

5. Isomorphismes

5.a. Définition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Définition 5.1. On appelle *isomorphisme* entre E et F une application linéaire bijective de E dans F. Lorsqu'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes. On appelle *automorphisme* de E un isomorphisme de E dans lui-même. Un automorphisme est donc un endomorphisme bijectif.

Exemple 5.2. L'application linéaire f de l'exemple 4.14 est, par la remarque 4.22 un isomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$, donc un automorphisme de $\mathbb{C}^3$.

Exemple 5.3. L'identité de E est un automorphisme de E (donc E est isomorphe à lui même).

Le fait que deux espaces vectoriels sont isomorphes signifie qu'ils ont exactement la même structure d'espace vectoriel : ce sont en quelques sortes deux copies du même espace vectoriel.

5.b. Application réciproque d'un isomorphisme

Proposition 5.4. *Soit E et F des espaces vectoriels et f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est une application linéaire (donc un isomorphisme) de F dans E.*

Remarque 5.5. Il découle de la proposition 5.4 que la relation "E est isomorphe à F" est symétrique i.e. :

$$E \text{ isomorphe à } F \iff F \text{ isomorphe à } E.$$

Exercice 5.6. Vérifier que c'est aussi une relation transitive, i.e. :

$$\Big(E \text{ isomorphe à } F \text{ et } F \text{ isomorphe à } G\Big) \Longrightarrow E \text{ isomorphe à } G.$$

Démonstration de la proposition. L'application réciproque d'une application bijective est également bijective. Si f^{-1} est une application linéaire, ce sera donc aussi un isomorphisme. Montrons que f^{-1} est linéaire.

Soit $\vec{x},\vec{y}\in F$. Alors (par définition de l'application réciproque) :

$$f(f^{-1}(\vec{x}+\vec{y}))=\vec{x}+\vec{y}.$$

De plus

$$f\left(f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y})\right)=f\left(f^{-1}(\vec{x})\right)+f\left(f^{-1}(\vec{y})\right)=\vec{x}+\vec{y}.$$

En combinant ces deux lignes, on obtient :

$$f(f^{-1}(\vec{x}+\vec{y}))=f\left(f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y})\right),$$

et donc, par injectivité de f,

$$f^{-1}(\vec{x}+\vec{y})=f^{-1}(\vec{x})+f^{-1}(\vec{y}).$$

On démontre de même que si $\lambda\in\mathbb{K}$, $f^{-1}(\lambda\vec{x})=\lambda f^{-1}(\vec{x})$. □

Exemple 5.7. Soit f l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f\big((x_1,x_2)\big)=(x_1+x_2,x_1-x_2).$$

Calculons l'application réciproque de f. Si $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2)=f^{-1}\big((y_1,y_2)\big)$ est l'unique solution du système

$$y_1=x_1+x_2,\quad y_2=x_1-x_2.$$

On résout ce système :

$$x_1=\frac{y_1+y_2}{2},\quad x_2=\frac{y_1-y_2}{2}.$$

On a donc

$$f^{-1}\big((y_1,y_1)\big)=\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right).$$

Plus généralement, calculer la réciproque d'un isomorphisme f dans un système de coordonnées revient à résoudre le système de Cramer inhomogène $f\big((x_1,\ldots,x_n)\big)=(y_1,\ldots,y_n)$, d'inconnues $(x_1,\ldots,x_n)$, de second membre $(y_1,\ldots,y_n)$. Cela revient aussi à calculer l'inverse de la matrice de f dans une base donnée (cf plus bas le point de vue matriciel).

On rappelle qu'une application est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque. On peut ainsi montrer qu'une certaine application linéaire est un isomorphisme en donnant son application réciproque :

Exemple 5.8. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. La rotation de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle θ :

$$R_\theta:(x,y)\mapsto(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$: elle admet pour application réciproque la rotation $R_{-\theta}$.

5.c. Condition sur les dimensions

Proposition 5.9. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F sont de dimension finie.*

i. Si f est injective, $\dim E \leq \dim F$.

ii. Si f est surjective, $\dim E \geq \dim F$.

iii. Si f est un isomorphisme, $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Le point (iii) découle immédiatement des points (i) et (ii).

Si f est injective, le noyau de f est de dimension 0 et le théorème du rang s'écrit $\dim E = \operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$. Puisque $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, on a $\dim \operatorname{Im}(f) \leq \dim F$, et le point (i) en découle.

Supposons maintenant f surjective. Alors $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim F$, et le théorème du rang s'écrit : $\dim E = \dim F + \dim \operatorname{Ker}(f) \geq \dim F$, ce qui donne le point (ii). □

Remarque 5.10. Si $\dim F > \dim E$, il n'existe donc aucune application linéaire surjective de E dans F. De même, si $\dim F < \dim E$, il n'existe aucune application linéaire injective de E dans F.

Exemple 5.11. L'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ définie par

$$\begin{aligned} &f\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big)\\ &= (x_1+x_2-\sqrt{2}x_3, x_1-x_2+x_3-x_4, x_2+3x_4, \pi x_1+e^{\pi}x_2+x_3, x_1-\sqrt{7}x_4) \end{aligned}$$

n'est pas surjective. En effet, il n'existe aucune application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$.

La proposition suivante est une application immédiate du théorème du rang et sera démontrée en travaux dirigés (cf exercice VII.7 p. 82).

Proposition 5.12. *Soit E et F de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. f est un isomorphisme.

ii. f est injective et $\dim E = \dim F$.

iii. f est surjective et $\dim E = \dim F$.

Exemple 5.13. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4,\ y_1-y_2+y_3-y_4=0\}.$$

Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to F\\ (x_1,x_2,x_3) &\mapsto (x_1+x_2, x_1-x_2, x_3-x_2, x_3+x_2). \end{aligned}$$

L'application est bien définie : on vérifie facilement que $(x_1+x_2, x_1-x_2, x_3-x_2, x_3+x_2)$ est toujours un élément de F. Montrons que f est bijective :

— L'espace vectoriel F est de dimension 3 (c'est le noyau d'une application linéaire de rang 1). Donc $\dim F = \dim \mathbb{R}^3$.

— On vérifie facilement que $\ker f = \{\vec{0}\}$, donc que f est injective.

— Par les deux points précédents et la proposition 5.12, f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans F.

Remarque 5.14. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$, où E, F et G sont des espaces vectoriels. On suppose que g est un isomorphisme. Alors le rang de $g \circ f$ est égal au rang de f. En effet, la restriction de g à l'image de f est une application linéaire bijective de l'image de f dans l'image de $g \circ f$. Ces deux images ont donc même dimension. On montre de même que si f est un isomorphisme, les images de g et $g \circ f$ sont confondues, et les rangs de g et $g \circ f$ sont égaux.

5.d. Matrices inversibles et isomorphismes

Proposition 5.15. *Soit E et F deux espaces de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. l'application f est un isomorphisme de E dans F ;

ii. $\dim E = \dim F$ *et la matrice A est inversible.*

Sous ces conditions, on a alors :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

Démonstration. Supposons que f est un isomorphisme. Par la proposition 5.9, $\dim E = \dim F$. Notons n leur dimension commune.

Par la formule donnant la matrice de la composée de deux applications linéaires (point (ii) de la proposition 3.8),

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_n,$$

ce qui montre que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible, d'inverse $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^{-1}$.

Réciproquement, on suppose que $\dim E = \dim F$ et que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible. Soit g l'application linéaire de F dans E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^{-1}$. Cette application linéaire existe par le Corollaire 1.7. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ g) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = I_n,\\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = I_n, \end{aligned}$$

où $n = \dim E = \dim F$, ce qui montre que $f \circ g$ est l'identité de F et $g \circ f$ est l'identité de E : f est donc bijective, d'application réciproque g.

□

5.e. Isomorphisme entre espaces de mêmes dimensions

Le théorème suivant est un résultat simple, mais important sur les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :

Théorème 5.16. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Si E et F sont isomorphes, $\dim E = \dim F$ par le point (iii) de la proposition 5.9.

Réciproquement, supposons $\dim E = \dim F$, et notons n leur dimension commune. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E, $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ une base de F, et f l'unique application linéaire de E dans F telle que

$$f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j, \quad j = 1 \ldots n$$

(on rappelle que l'on peut définir une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie en donnant l'image d'une base, cf le corollaire 1.7). Vérifions que f est injective. Soit $\vec{x}$ un élément de $\mathrm{Ker}(f)$, $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées dans la base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Alors

$$f(\vec{x}) = \vec{0}_F \text{ i.e. } f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n) = \vec{0}_F.$$

En développant le terme de gauche de la dernière égalité par linéarité, et en utilisant que $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$ pour $j = 1 \ldots n$, on obtient

$$x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}_F,$$

et comme la famille $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ est libre,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

On en déduit $\vec{x} = \vec{0}_E$. On a montré $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$, c'est à dire que f est injective. Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(E)$ donc f est surjective. Finalement f est bijective. □

Exemple 5.17. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et F de l'exemple 5.13 sont isomorphes car tous les deux de dimension 3. L'application linéaire f de l'exemple 5.13 donne un isomorphisme explicite.

Exercice 5.18. Montrer de la même manière que $\dim E \leq \dim F$ si et seulement si il existe une injection de E dans F, ou encore si et seulement si il existe une surjection de F dans E.

(cf correction p. 81).

Remarque 5.19. Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors le rang de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est égal au rang de f, et ne dépend pas du choix des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. En effet, soit n la dimension de E, p la dimension de F, et g l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui a pour matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Par définition, le rang de A est égal au rang de g. De plus, si ϕ est l'isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$ qui envoie les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans ceux de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et ψ est l'isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^p$ qui envoie les vecteurs de $\mathcal{C}$ dans ceux de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$f = \psi^{-1} \circ g \circ \phi,$$

ce qui montre l'assertion proposée, puisque la composition par un isomorphisme ne change pas le rang (cf Remarque 5.14).

6. Complément : formule de changement de bases

On donne ici une formule générale permettant de changer les bases de la matrice de représentation d'une application linéaire. Pour déduire $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)$ de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dans l'exemple de §2.d, on a eu besoin :
— des coordonnées des vecteurs de la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$;
— des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{C}}$.
Ces informations sont données par les *matrices de passage* d'une base à une autre, que nous allons définir maintenant. La formule de changement de base proprement dite, qui utilise ces matrices de passage, sera vue en §6.b. La définition d'une matrice de passage et la formule de changement de base ne sont pas au programme du tronc commun de L1 à l'Institut Galilée, mais il est conseillé aux étudiants voulant poursuivre leurs études en mathématiques d'en connaître au moins l'existence. Elle sera par ailleurs utilisée une fois dans ce cours, au chapitre VIII, pour définir le déterminant d'un endomorphisme.

6.a. Matrices de passage

Définition 6.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = (\vec{\tilde{u}}_1, \vec{\tilde{u}}_2, \ldots, \vec{\tilde{u}}_n)$ deux bases de E. La *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$, est la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. En d'autres termes, si l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = [p_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, on a

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \vec{\tilde{u}}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{u}_i.$$

Exemple 6.2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une autre base de $\mathbb{K}^n$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice $n \times n$ dont le j-ième vecteur

colonne est constitué des coordonnées de $\vec{u}_j$. Supposons $n = 3$ et considérons la famille
$$\mathcal{C} = \big((1,1,0), (-2,3,0), (4,5,6)\big).$$
On vérifie facilement que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On obtient sans calcul la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exemple 6.3. On reprend les notations de l'exemple de l'exemple de 2.d p.69. Alors, d'après la première étape de cet exemple :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$
D'après la deuxième étape :
$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition 6.4. *Sous les hypothèses de la définition précédente, on note*
$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}.$$
Soit $\vec{x} \in E$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *ses coordonnées dans* $\mathcal{B}$ *et* $\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{bmatrix}$ *ses coordonnées dans* $\widetilde{\mathcal{B}}$. *Alors*
$$X = P\widetilde{X}.$$

Démonstration. On a, par définition de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$,
$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_j \vec{\widetilde{u}}_j = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\widetilde{x}_j \right) \vec{u}_i,$$
et donc
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\widetilde{x}_j,$$
ce qui montre la formule annoncée. □

Avertissement 6.5. L'appellation "matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$" peut être source de confusion : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ permet de passer des coordonnées d'un vecteur dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ à celles de ce même vecteur dans $\mathcal{B}$ (et non l'inverse, comme on pourrait s'y attendre).

Le lecteur pourra vérifier que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ est en fait la matrice de représentation, dans la base $\mathcal{B}$, de l'application linéaire qui envoie les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans ceux de $\widetilde{\mathcal{B}}$, ce qui explique son nom :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f), \quad f \in \mathcal{L}(E,E), \quad \forall i = 1\ldots n,\ f(\vec{u}_i) = \vec{\widetilde{u}}_i.$$

Corollaire 6.6. *Toute matrice de passage est inversible. De plus :*
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \left(\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

Démonstration. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$ et Q la matrice de passage de $\widetilde{\mathcal{B}}$ à $\mathcal{B}$. Alors, si $\vec{x} \in E$ a pour coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ et $\widetilde{X}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}$, on a, par la proposition 6.4 :
$$QX = \widetilde{X} \text{ et } X = P\widetilde{X}.$$
D'où
$$\forall X \in \mathbb{K}^n, \quad X = PQX.$$
On en déduit facilement (par exemple en utilisant cette égalité avec $X = E_k$, $k = 1, \ldots, n$, où comme auparavant $E_k = [\delta_{i,k}]_{1\leq i\leq n}$) :
$$PQ = I_n.$$
□

Exemple 6.7. On revient à l'exemple de 2.d. Alors,
$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
En d'autres termes,
$$\vec{u}_1 = \vec{\widetilde{u}}_1 \text{ et } \vec{u}_2 = -\vec{\widetilde{u}}_1 + 2\vec{\widetilde{u}}_2,$$
ce que l'on peut vérifier par un calcul direct à l'aide des expressions de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{\widetilde{u}}_1$ et $\vec{\widetilde{u}}_2$.

De même, en calculant l'inverse de la matrice $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}$, on obtient
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.b. Formule de changement de bases

Théorème 6.8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ des bases de E, $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ des bases de F. Alors*

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) &= \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\\ &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}}\right)^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\end{aligned}$$

Démonstration. Ceci découle de la formule de changement de coordonnées de la proposition 6.4.

Soit $\vec{x} \in E$, X le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et $\widetilde{X}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{B}}$. Alors, par les propositions 2.5 (p. 70) et 6.4, les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans $\mathcal{C}$ sont :

$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\,\widetilde{X}$$

et les coordonnées de $f(\vec{x})$ dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ sont donc :

$$\widetilde{Y} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,Y = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\,\widetilde{X}.$$

Or, de nouveau par la proposition 2.5,

$$\widetilde{Y} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)\widetilde{X}.$$

On a donc :

$$\forall \widetilde{X} \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\,\widetilde{X} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)\widetilde{X},$$

ce qui montre comme annoncé :

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f).$$

□

Remarque 6.9. On peut résumer le théorème 6.8 par le schéma suivant

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)"] & (F,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q^{-1}"] \\
(E,\widetilde{\mathcal{B}}) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f)"'] & (F,\widetilde{\mathcal{C}})
\end{tikzcd}$$

où $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$ permet de passer des coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ aux coordonnées dans $\mathcal{B}$, et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}}$ permet de passer des coordonnées dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ aux coordonnées dans $\mathcal{C}$ (cf proposition 6.4).

Exemple 6.10. On revient à l'exemple donné en 2.d. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}.$$

On en déduit, par le théorème 6.8, puis un calcul simple de produits matriciels :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(f) &= \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}\\ &= \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & -\frac{5}{2}\\ 3 & 1\\ 3 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de l'exemple 2.d, p.69.

7. Correction de quelques exercices

Correction de l'exercice 1.5

Soit R la distance entre l'origine et M, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre M et de rayon R. Notons $O = (0,0)$ l'origine, $A = f\big((0,0)\big)$. Par définition d'une rotation, A est le point de $\mathcal{C}$ tel que l'angle $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})$ soit égal à θ. Puisque θ n'est pas congru à 0 modulo 2π, on en déduit que O et A ne sont pas confondus, et donc que $f(0,0) \neq (0,0)$. Par la proposition 1.4, l'application f n'est pas linéaire .

Correction de l'exercice 1.9.

On exprime les vecteurs de la base canonique en fonction de $\vec{u} = (1,3)$ et $\vec{v} = (1,4)$. En résolvant deux systèmes linéaires à deux équations et deux inconnues, on obtient :

$$(1,0) = 4\vec{u} - 3\vec{v}, \quad (0,1) = -\vec{u} + \vec{v}.$$

D'où

$$f\big((x,y)\big) = f(x(1,0) + y(0,1)) = f\big(x(4\vec{u} - 3\vec{v}) + y(-\vec{u} + \vec{v})\big) = (4x - y)(-1,2,3),$$

où pour la dernière égalité on a utilisé que $f(\vec{u}) = (-1,2,3)$ et $f(\vec{v}) = (0,0,0)$.

Correction de l'exercice 3.6.

$$g \circ f\big((x_1,x_2)\big) = \big(x_1 + x_2, -2(x_1 + x_2), 3(x_1 + x_2)\big).$$

Correction de l'exercice 3.7.

Par des considérations géométriques élémentaires (ou un calcul utilisant les formules trigonométriques), on obtient $R_\theta \circ R_\sigma = R_{\theta+\sigma}$.

La symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ d'axe Ox est l'application $(x, y) \mapsto (x, -y)$. La symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ d'axe Oy est l'application $(x, y) \mapsto (-x, y)$. La composée de ces deux symétries (dans n'importe quel ordre) est l'application $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, c'est à dire la symétrie de centre $(0, 0)$.

Correction de l'exercice 3.11.

a. Par la proposition 3.8,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. On a envie de dire que AB est une matrice de représentation de l'application $f \circ g$ (qui est bien définie, comme application application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$). Mais

$$AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g),$$

la base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme l'"espace d'arrivée" de g n'est donc pas la même que la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme "espace de départ" de f. Le produit AB n'a donc pas d'interprétation particulière en terme de composition d'applications linéaires.

Correction de l'exercice 4.2.

L'application f de E dans F est injective si et seulement si pour tout y de F, $f^{-1}(\{y\})$ est vide ou réduit à un point. Elle est surjective si et seulement si pour tout y de F, $f^{-1}(\{y\})$ est non vide. Elle est bijective si et seulement si pour tout y de F, $f^{-1}(\{y\})$ est un singleton.

Réponses à l'exercice 4.6.

$f^{-1}(]-\infty, 0[) = \emptyset$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f^{-1}([0, +\infty[) = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$, $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$, $f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right) = [0, +\infty[$ et $f^{-1}\left(f([0, +\infty[)\right) = \mathbb{R}$.

i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective : $f(1) = 1 = f(-1)$. Elle n'est pas surjective car $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

ii. $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ n'est toujours pas injective (pour la même raison) mais elle est bien surjective.

iii. $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est injective : en effet, si x est positif, $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{f(x)}$, donc x est uniquement déterminé par $f(x)$. Elle n'est pas surjective, car $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.

iv. En combinant les arguments des points précédents, on montre que f est un bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même. Son application réciproque est $x \mapsto \sqrt{x}$.

Correction de l'exercice 4.12.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f\big((x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_1 - x_3).$$

Soit

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (c'est le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$). On a

$$A = f(G).$$

Donc A est l'image d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ par l'application linéaire f, ce qui montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 5.18.

Soit E et F des espaces vectoriels, de dimensions respectives n et p.

On sait déjà (proposition 5.9) que s'il existe une application linéaire injective de E dans F ou une application linéaire surjective de F dans E, $n \leq p$. Montrons la réciproque. On note $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base de E, et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ une base de F. Supposons $n \leq p$. Construisons une application injective $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et une application surjective $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

— Soit f l'application linéaire de E dans F définie par

$$f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

La famille $(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, extraite d'une famille libre, est libre. Par la proposition 4.15, f est injective.

— Soit g l'application linéaire de F dans E définie par

$$g(\vec{v}_j) = \vec{u}_j,\ j = 1, \ldots, n, \qquad g(\vec{v}_j) = \vec{0},\ j = n+1, \ldots, p.$$

La famille $(g(\vec{v}_1), \ldots, g(\vec{v}_n)) = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n, 0, \ldots, 0)$, qui complète la base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est génératrice. Par la proposition 4.15, g est surjective.

8. Travaux dirigés

Exercice VII.1. Les applications suivantes de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ sont-elles linéaires ? Si oui, déterminer leur matrice de représentation dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$.

a. $\mathbb{K}=\mathbb{R},\ n=p=2,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\big((x,y)\big)=(4yx,3xy)$.

b. $\mathbb{K}=\mathbb{R},\ n=p=2,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\big((x,y)\big)=(3x+y,2x+3y)$.

c. $\mathbb{K}=\mathbb{R},\ n=p=2,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\big((x,y)\big)=(x+2y+2,2x-4y+3)$.

d. $\mathbb{K}=\mathbb{C},\ n=3,\ p=2,\quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{C}^3,\ f\big((x,y,z)\big)=(4x+(2+i)y-(2+i)z,(1+i)x+2y+3iz)$.

e. $\mathbb{K}=\mathbb{R},\ n=1,\ p=4,\ f(x)=(3x,0,-x,0)$.

Exercice VII.2. Soient $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ et $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ définies par : $f\big((x,y,z)\big)=(x-y,-x+2z)$ et $g\big((x,y)\big)=(x-y,2x+y,-x)$.

a. Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques.

b. Déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$ en utilisant le calcul matriciel.

c. Mêmes questions avec les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

$$f\big((x,y)\big)=(x-y,x+y),\quad g\big((x,y)\big)=(x+2y,2x+y).$$

Exercice VII.3. Soit $\vec{u}_1=(-3,2,1)$, $\vec{u}_2=(-1,1,0)$, $\vec{u}_3=(-6,6,1)$, et $\mathcal{B}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.

a. Monter que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$\begin{aligned}&f\big((x,y,z)\big)\\&=\big((9+4i)x+(9+3i)y+(6+6i)z,-(8+4i)x-(8+3i)y-(6+6i)z,-2x-2y-z\big).\end{aligned}$$

Déterminer la matrice A de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$

c. Calculer A^6. Soit $\vec{v}=(0,0,-i)$. Donner les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f^6(\vec{v})$.

Exercice VII.4. Soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x+y+z=0\}$.

a. Soit $\vec{u}_1=(1,2,-4)$, $\vec{u}_2=(1,1,-3)$. Justifier que E est un espace vectoriel et montrer que $\mathcal{B}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ est une base de E.

b. Soit $(x,y,z)\in E$. Exprimer les coordonnées (a_1,a_2) de (x,y,z) dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ en fonction de x et y.

c. Pour $(x,y,z)\in E$, on pose

$$f\big((x,y,z)\big)=(-x+2y,-3x+4y,5x-8y)\,.$$

Montrer que f est un endomorphisme de E, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Exercice VII.5.

a. Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Rappeler une relation entre les dimensions de l'image et du noyau de f et la dimension de E.

b. Donner pour les applications linéaires suivantes une base de l'image et une base du noyau. Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ?
- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f\big((x,y)\big)=(2x+y,x+3y)$.
- $g:\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^3$ définie par $g\big((x,y)\big)=(x+y,2x+2y,ix+iy)$.

c. Existe-t-il une application linéaire :
- de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est de dimension 1 ?
- de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est de dimension 2 et l'image de dimension 1 ?
- de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont l'image de dimension 2 ?
- de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont l'image est de dimension 3 ?

Si oui, donner un exemple d'une telle application.

Exercice VII.6. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, F un espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ une base de E et $\mathcal{C}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ une base de F. Soit f l'unique application linéaire de E dans F telle que

$$f(\vec{u}_1)=2\vec{v}_1-\vec{v}_2,\quad f(\vec{u}_2)=3\vec{v}_1-\vec{v}_2,\quad f(\vec{u}_3)=\vec{v}_1+\vec{v}_2.$$

a. Justifier l'existence de f à l'aide d'un théorème du cours. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

b. Donner une base de l'image et une base du noyau de f.

Exercice VII.7. Montrer la proposition 5.12 p. 77.

Exercice VII.8. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\text{ t.q. }x=y+z\},$$

et Q le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

$$Q=\big\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\text{ t.q. }x_1+x_2=x_3+x_4\text{ et }x_1+2x_2=x_3\big\}\,.$$

Justifier qu'il existe un isomorphisme entre P et $\mathbb{R}^2$, entre Q et $\mathbb{R}^2$ et entre P et Q. Donner des isomorphismes explicites entre ces trois espaces.

Exercice VII.9. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E. Tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit donc de manière unique $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$, avec $\vec{v}\in F$ et $\vec{w}\in G$. La *projection* p sur F parallèlement à G est par définition l'application $\vec{u}\mapsto\vec{v}$.

a. Vérifier que p est une application linéaire. Calculer $p^2 = p \circ p$. Donner le noyau et l'image de p.

b. On note n la dimension de E et q celle de F. Quelle est la dimension de G ? Soit $\mathcal{C}$ une base de F, $\mathcal{D}$ une base de G. Vérifier que $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ est une base de E. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p)$.

c. Soit f une application linéaire de E dans E telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires et que f est la projection sur $\mathrm{Im}\, f$, parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$.

d. On suppose $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(x,y,0),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, $H = \{(x,y,z)\ :\ x+y+z = 0\}$. Montrer que F et G (respectivement F et H) sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Soit p_1 la projection sur F parallèlement à G, p_2 la projection sur G parallèlement à F et p_3 la projection sur H parallèlement à F. Exprimer, pour $i = 1,2,3$, $p_i(x,y,z)$ en fonctions de x, y et z.

Exercice VII.10. Soit E et F des espaces vectoriels. On suppose E de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une famille libre.

9. Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice VII.11. Soit l'espace vectoriel $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x = y\}$.

a. Soit $\vec{u}_1 = (3,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,0,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,0)$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que $\mathcal{C} = (\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E.

b. Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans E tel que $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_3$ et $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$. Donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

c. Soit $\mathcal{D} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ dans la base $\mathcal{B}$. Donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(f)$.

Exercice VII.12 (Questions de cours)**.** Soit E, F des $\mathbb{K}$-espace vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

a. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que f est une injection si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}_E\}$.

b. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Montrer que f est surjective si et seulement si $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de E.

c. Démonstration du théorème du rang.

Exercice VII.13. Pour toutes les applications de l'exercice VII.1 qui sont des applications linéaires, déterminer une base de leur image et une base de leur noyau, et leur rang. Ces applications sont-elles injectives ? Surjectives ?

VIII. Déterminant

La référence pour ce chapitre est encore le livre de Liret-Martinais [1], dont on suit la présentation générale. On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définition du déterminant d'une matrice. Exemples

1.a. Définition

Soit $n \geq 1$. Le *déterminant* d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det A$, est un scalaire (un élément de $\mathbb{K}$), défini par récurrence sur n de la manière suivante.

Si $A = [a]$ est une matrice 1×1, $\det A = a$.

Fixons $n \geq 2$ et supposons le déterminant défini pour les matrices $(n-1)\times(n-1)$. Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons, pour $1 \leq i, j \leq n$, $A_{i,j}$ la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue à partir de A en retirant à A la i-ème ligne et la j-ième colonne. Alors par définition :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}.$$

Remarquons que $\det A_{i,1}$ est le déterminant d'une matrice $(n-1)\times(n-1)$, qui est donc bien défini par hypothèse de récurrence.

On note parfois

$$\det A = |A|, \quad \det[a_{i,j}]_{1\leq \substack{i \\ j} \leq n} = |a_{i,j}|_{1\leq \substack{i \\ j} \leq n}.$$

1.b. Formules pour les petites matrices

On peut facilement calculer le déterminant des matrices 2×2 et 3×3.

Matrice 2×2. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice 2×2. On a donc :

$$A_{1,1} = [d], \quad A_{2,1} = [b], \quad A_{1,2} = [c], \quad A_{2,2} = [a].$$

Par définition du déterminant,

$$\det(A) = a(\det[d]) - c(\det[b])$$

et donc

$$\det(A) = ad - bc.$$

1. François Liret et Dominique Martinais. *Algèbre 1ère année - Cours et exercices avec solutions.* Dunod, deuxième édition, 2003

On retrouve la formule utilisée au chapitre II (cf p. 22) pour étudier l'inversibilité des matrices 2×2.

Matrices 3×3. Soit $A = [a_{i,j}]_{1\leq \substack{i \\ j} \leq 3}$ une matrice 3×3. Par définition du déterminant :

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{2,1} \det A_{2,1} + a_{3,1} \det A_{3,1},$$

Soit, en utilisant la formule pour les déterminants 2×2,

$$\det A = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) - a_{2,1}(a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) + a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}).$$

En développant, on obtient que le déterminant de A vaut :

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$

Cette formule peut se retenir avec le schéma suivant (*règle de Sarrus*) :

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}$$

Dans ce schéma, on a mis deux copies de la matrice $[a_{i,j}]$ côte à côte (la 3ème colonne de la deuxième copie, inutile, a été omise). Les flèches représentent un produit de trois facteurs, qui apparaît avec un signe $+$ dans la formule si la flèche est pleine, et un signe $-$ si la flèche est en pointillés.

Exercice 1.1. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(cf Réponse p. 92)

On peut bien entendu obtenir (par récurrence sur n) une formule exacte du même type pour un déterminant $n \times n$ pour tout entier n. Mentionnons toutefois qu'une telle formule est somme de $n!$ termes, chacun produit de n coefficients de A. Par exemple, pour $n = 20$, il s'agit de faire la somme d'environ $2,4\times 10^{18}$ produits de 20 nombres. Une telle formule est bien entendu inutilisable, même informatiquement, pour n grand. Nous verrons dans la suite de ce chapitre des méthodes permettant de calculer plus simplement les déterminant. Pour mémoire, la formule générale d'un déterminant $n \times n$ est :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ. Le lecteur n'ayant jamais rencontré les termes *groupe symétrique*, *signature* et *permutation* peut ignorer pour l'instant cette formule, qui ne sera pas utilisée dans la suite.

1.c. Cas des matrices triangulaires supérieures

On renvoie le lecteur à la définition 3.12 du Chapitre II (p. 25) des matrices triangulaires supérieures.

Proposition 1.2. *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes diagonaux.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la taille n de la matrice. C'est évident pour $n = 1$.

Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour les matrices $(n-1) \times (n-1)$. Soit A une matrice triangulaire supérieure $n \times n$. Alors, par définition du déterminant, puisque $a_{2,1} = a_{3,1} = \ldots = a_{n,1} = 0$,

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1}.$$

Puisque $A_{1,1}$ est un matrice triangulaire supérieure $(n-1) \times (n-1)$, on obtient par hypothèse de récurrence

$$\det A_{1,1} = a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

ce qui donne la formule voulue :

$$\det A = a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

□

Remarque 1.3. Nous verrons plus loin que le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée. La formule précédente est donc également valable pour les matrices triangulaires inférieures.

Exemple 1.4.

$$\det I_n = 1, \quad \det(\lambda I_n) = \lambda^n, \quad \det D_k(\lambda) = \lambda,$$

où $D_k(\lambda)$ est une matrice de dilatation (cf définition 3.1 du Chapitre II)

Exemple 1.5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1+i & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix} = -8i$$

2. Manipulations sur les lignes

On étudie maintenant l'effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes. Ceci nous permettra d'une part de calculer plus facilement des déterminants explicites, et d'autre part de montrer que le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants de ces matrices (cf 3).

2.a. Echange de deux lignes

Proposition 2.1. *Soit A une matrice carrée $n \times n$, $1 \leq i < k \leq n$, et A' la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes i et k. Alors* $\det(A') = -\det(A)$.

Exemple 2.2.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

On obtient cette valeur en échangeant les lignes 1 et 2, et les lignes 3 et 4, puis en utilisant la formule du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

Exemple 2.3.

$$\det R_{k\ell} = -1,$$

où $R_{k\ell}$ est la matrice élémentaire donnée par la définition 3.1 du Chapitre II (cette matrice est obtenue à partir de I_n en échangeant les lignes k et ℓ).

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Le résultat est facile pour $n = 2$. Le seul échange de lignes possible est celui des lignes 1 et 2. Or ;

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Soit $n \geq 2$. On suppose la conclusion de la proposition connue pour les matrices $(n-1) \times (n-1)$. Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice $n \times n$. Par définition du déterminant,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1},$$

où, comme auparavant, $A_{i,1}$ est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en retirant la i-ème ligne et la première colonne.

On commence par traiter le cas de l'échange de deux lignes successives : on fixe $i_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$ et on suppose que A' est obtenue à partir de A en échangeant les lignes i_0 et $1 + i_0$. En notant $A' = [a'_{i,n}]$, on a :

$$\det A' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1}. \tag{VIII.1}$$

La démonstration repose sur une analyse élémentaire, mais minutieuse, des termes de cette somme, en distinguant plusieurs cas selon les valeurs de i.

Si $i \neq i_0$ et $i \neq 1+i_0$, $a'_{i,1} = a_{i,1}$, et $A'_{i,1}$ est la matrice obtenue en enlevant la i-ème ligne et la première colonne à A'. On en déduit que si $i > 1+i_0$, la matrice $A'_{i,1}$ est obtenue à partir de la matrice $A_{i,1}$ en échageant les lignes i_0 et $1+i_0$. Si $i < i_0$, le retrait de la ligne i a décalé la numérotation des lignes i_0 et $1+i_0$, et on vérifie que cette fois $A'_{i,1}$ est obtenue à partir de $A_{i,1}$ en échangeant les lignes i_0-1 et i_0. Dans tous les cas, par hypothèse de récurrence,

$$\det A'_{i,1} = -\det A_{i,1}.$$

Il reste à considérer les indices $i = i_0$ et $i = 1+i_0$ dans la somme (VIII.1). Puisque A' est obtenu à partir de A en échangeant les lignes i_0 et $1+i_0$, on a :

$$a'_{i_0,1} = a_{1+i_0,1} \text{ et } a'_{1+i_0,1} = a_{i_0,1}.$$

De plus, $A'_{i_0,1}$ est obtenu à partir de A' en retirant la ligne i_0 et la première colonne. En utilisant la définition de A', on voit que $A'_{i_0,1}$ est obtenu à partir de A en retirant la ligne i_0+1 et la première colonne. De même, $A_{1+i_0,1}$ est obtenu à partir de A en retirant la ligne i_0 et la première colonne. On en déduit :

$$A'_{i_0,1} = A_{1+i_0,1} \text{ et } A'_{1+i_0,1} = A_{i_0,1}.$$

En revenant à la formule (VIII.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\det A' = &- \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\notin\{i_0,1+i_0\}}} (-1)^{i+1} a_{i,1}\det A_{i,1}\\ &+ (-1)^{1+i_0} a_{1+i_0,1}\det A_{1+i_0,1} + (-1)^{2+i_0} a_{i_0,1}\det A_{i_0,1}\\ &= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_{i,1}\det A_{i,1} = -\det A.\end{aligned}$$

Il reste à traiter le cas de l'échange de deux lignes non successives (L_{i_0}) et (L_{k_0}), avec $1 \leq i_0 < k_0 \leq n$. On raisonne pour cela par récurrence sur la distance $k_0 - i_0$ entre ces lignes. Le cas $k_0 - i_0 = 1$ vient d'être traité. Pour traiter le cas $k_0 - i_0 > 1$, on remarque que pour échanger les lignes i_0 et k_0, il suffit de faire les opérations suivantes

— $(L_{1+i_0}) \leftrightarrow (L_{k_0})$, échange de deux lignes de distance $k_0 - 1 - i_0$, qui multiplie le déterminant par -1 par hypothèse de récurrence.
— $(L_{i_0}) \leftrightarrow (L_{1+i_0})$, échange de deux lignes successives, qui multiplie le déterminant par -1 par le calcul précédent.
— $(L_{1+i_0}) \leftrightarrow (L_{k_0})$, échange de deux lignes de distance $k_0 - 1 - i_0$, qui multiplie le déterminant par -1 par hypothèse de récurrence.

Finalement, on a montré qu'en échangeant les lignes i_0 et k_0, on a multiplié le déterminant par -1, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 2.4. *Soit A une matrice ayant deux lignes identiques. Alors* $\det A = 0$.

Démonstration. En échangeant les deux lignes en question, on obtient, par la proposition précédente :

$$\det A = -\det A,$$

ce qui montre que $\det A = 0$. □

2.b. Linéarité par rapport à une ligne

Proposition 2.5. *Soit A, B, C trois matrices $n\times n$ et $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$. On suppose :*
— *si $i \in \{1,\ldots,n\}$ avec $i \neq i_0$, les i-èmes lignes de A, B et C sont identiques ;*
— *la ligne i_0 de A est la somme des lignes i_0 de B et de C.*

Alors

$$\det A = \det B + \det C.$$

Exemple 2.6.

$$\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&2&2\\0&1&3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&3&-2\\1&0&2\\0&1&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&3&-2\\1&2&4\\0&1&3\end{vmatrix}.$$

Démonstration. On raisonne de nouveau par récurrence sur la dimension n des matrices. Le résultat est évident pour $n = 1$.

On fixe un entier $n \geq 2$. On suppose le résultat vrai pour les matrices $(n-1)\times(n-1)$. On se donne trois matrices $n\times n$, $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ et $C = [c_{i,j}]$ qui vérifient les hypothèses de la proposition. Quitte à échanger les lignes 1 et i_0 de A, B et C (cf proposition 2.1), on peut supposer $i_0 = 1$. On a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_{i,1}\det A_{i,1}.$$

Si $i \geq 2$, $a_{i,1} = b_{i,1} = c_{i,1}$. De plus, par hypothèse de récurrence,

$$\det A_{i,1} = \det B_{i,1} + \det C_{i,1}.$$

Par ailleurs $A_{1,1} = B_{1,1} = C_{1,1}$, et $a_{1,1} = b_{1,1} + c_{1,1}$. Donc dans les deux cas ($i \geq 2$ et $i = 1$) :

$$a_{i,1}\det A_{i,1} = b_{i,1}\det B_{i,1} + c_{i,1}\det C_{i,1}.$$

On en déduit

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(b_{i,1}\det B_{i,1} + c_{i,1}\det C_{i,1}) = \det B + \det C.$$

□

Par un raisonnement analogue, on montre

Proposition 2.7. *Soit A et B des matrices $n \times n$, $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que B est obtenue à partir de A en multipliant par λ la ligne i_0. Alors*

$$\det B = \lambda \det A.$$

Exemple 2.8. Si A est une matrice $n \times n$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Remarque 2.9. Fixons $1 \leq i_0 \leq n$ et des vecteurs lignes (des éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$) $(L_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}}$, et considérons l'application f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui a $(x_1, \dots, x_n)$ associe le déterminant de la matrice dont les lignes sont les lignes L_i, sauf la ligne i_0 qui vaut $[x_1 \dots x_n]$. Les propositions 2.5 et 2.7 signifient exactement que f est linéaire. On dit que le déterminant est *linéaire par rapport à une ligne*, où encore que l'application qui à n vecteurs lignes associe le déterminant correspondant est n-linéaire ou multilinéaire. Par exemple, l'application

$$g : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ (*exercice* : calculer $g\big((x_1, x_2, x_3)\big)$ et vérifier que c'est bien une application linéaire).

Donnons maintenant deux conséquences importantes des Propositions 2.5 et 2.7.

Corollaire 2.10. *Soit A une matrice carrée ayant une ligne nulle. Alors* $\det A = 0$.

Démonstration. En effet, on obtient A à partir de A en multipliant par 0 la ligne nulle. La proposition 2.7 donne donc :

$$\det A = 0 \times \det A = 0.$$

□

Corollaire 2.11. *Soit A et A' deux matrices $n \times n$, et $i, k \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq k$. On suppose que A' est obtenue à partir de A par le remplacement $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_k)$. Alors* $\det(A) = \det(A')$.

Démonstration. En effet, par les propositions 2.5 et 2.7,

$$\det A' = \det A + \lambda \det B,$$

où B est la matrice dont toutes les lignes sont égales à celle de A, sauf la i-ème ligne qui est égale à la k-ième ligne de A. Par le corollaire 2.4, $\det B = 0$, ce qui conclut la preuve. □

Exemple 2.12. Le déterminant d'une matrice de transvection (cf Chapitre II §3.a, p. 23) $T_{k\ell}(\lambda)$ est 1. En effet $T_{k\ell}(\lambda) = T_{k\ell}(\lambda) I_n$ est obtenu à partir de I_n par le cadrage $(L_k) \leftarrow (L_k) + \lambda(L_\ell)$, et le résultat découle du Corollaire 2.11.

Pour résumer, on a déterminé l'effet sur un déterminant des opérations élémentaires sur les lignes : la multiplication d'une ligne par un scalaire multiplie le déterminant par ce même scalaire, l'échange de deux lignes multiplie le déterminant par -1, et un remplacement ne change pas le déterminant. Puisqu'on connaît le déterminant d'une matrice échelonnée (une telle matrice est triangulaire supérieure), on peut utiliser la phase de descente de la méthode du pivot de Gauss du chapitre I pour calculer un déterminant.

Exercice 2.13. Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & 14 \end{vmatrix}$$

(cf réponse p. 92).

3. Déterminant, produit de matrices et matrices inversibles

L'objet de cette partie est de montrer deux théorèmes fondamentaux sur le déterminant d'un produit de matrices et sur la caractérisation des matrices inversibles par le déterminant, et de donner quelques applications.

3.a. Résultats principaux

Théorème 3.1. *Soit A et B deux matrices $n \times n$. Alors*

$$\det(AB) = \det A \times \det B.$$

Théorème 3.2. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Preuve des théorèmes 3.1 et 3.2. La stratégie de la preuve est simple : lorsque A est une matrice élémentaire, la multiplication par A se réduit à une opération sur les lignes, et la formule du déterminant de AB se ramène aux résultats que l'on vient de démontrer dans la section 2. On utilise ensuite que toute matrice est produit de matrices élémentaires et d'une matrice échelonnée réduite pour montrer les deux théorèmes dans le cadre général.

Etape 1. Multiplication par une matrice élémentaire. On montre ici que la formule $\det(AB) = \det A \times \det B$ est valable lorsque A est une matrice élémentaire (cf Chapitre II, §3.a pour la définition de ces matrices et les notations $D_k(\lambda)$, $T_{k\ell}(\lambda)$, $R_{k\ell}$).

Si A est une matrice de dilatation $D_k(\lambda)$, on a $\det A = \lambda$. De plus, AB est obtenu à partir de B en multipliant sa k-ième ligne par λ. On a donc, par la proposition 2.7, $\det(AB) = \lambda \det B = (\det A)(\det B)$.

Si A est une matrice de transvection, $\det(A) = 1$ (cf Exemple 2.12). Par ailleurs, AB est obtenu à partir de B par un remplacement. Par le corollaire 2.11, $\det(AB) = \det B = (\det A)(\det B)$.

Enfin, si A est un matrice de transposition $R_{k,\ell}$, on a $\det(A) = -1$ (cf exemple 2.3) et, par la proposition 2.1, $\det(AB) = -\det B = (\det A)(\det B)$.

Etape 2. On montre le théorème 3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par la méthode du pivot de Gauss appliquée aux matrices (cf Chapitre II, §3),

$$E_k \dots E_1 A = A',$$

où les E_j sont des matrices élémentaires, et A' est une matrice échelonnée réduite. Par l'étape 1, et une récurrence élémentaire

$$\det(E_k) \dots \det(E_1) \det(A) = \det(A'). \tag{VIII.2}$$

On rappelle que toutes les matrices élémentaires sont inversibles, et que les déterminants des matrices élémentaires, calculés plus hauts, sont tous non nuls. Par ailleurs la seule matrice échelonnée réduite $n \times n$ inversible est la matrice I_n, et toute autre matrice échelonnée réduite a au moins une ligne nulle (cf Théorème 3.16 du chapitre II sur les matrices).

On distingue deux cas. Si A est inversible, A' doit être inversible (c'est le produit de matrice inversible), et donc $A' = I_n$. La formule (VIII.2) se lit $\det(E_k) \dots \det(E_1) \det(A) = 1$, ce qui montre que le déterminant de A est non nulle.

Si A est non-inversible, alors A' ne l'est pas non plus : sinon A pourrait s'écrire comme produit des matrices élémentaires $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$ (inversibles) et de la matrice inversible A', et serait donc aussi inversible. Puisque A' est échelonnée réduite, on en déduit que A' a une ligne nulle. Par le Corollaire 2.10, $\det A' = 0$. Par la formule VIII.2, puisque tous les déterminants $\det(E_j)$ sont non nuls, on en déduit $\det A = 0$. Le théorème 3.2 est démontré.

Etape 3. Fin de la preuve du théorème 3.1. On suppose maintenant que A et B sont des matrices $n \times n$ quelconques. On veut montrer $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. On distingue deux cas :

— Si A est non inversible, AB ne l'est pas non plus (sinon A serait inversible, d'inverse $B(AB)^{-1}$, par la formule $AB(AB)^{-1} = I_n$). Par l'étape 2, $\det(A) = 0$ et $\det(AB) = 0$, ce qui montre la formule $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ dans ce cas.

— Si A est inversible, on sait que A est produit de matrices élémentaires : avec les notations de l'étape 2, $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$. Par l'étape 1 et une récurrence immédiate

$$\det(AB) = \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}) \det(B)$$

et

$$\det A = \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}),$$

ce qui donne à nouveau $\det(AB) = \det A \times \det B$, concluant la preuve du théorème 3.1.

□

Remarquons que si A est inversible, on a

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}),$$

et donc

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Exercice 3.3. A quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ le système suivant est-il un système de Cramer ?

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

(cf correction p. 92).

Remarque 3.4. On peut utiliser le déterminant pour établir qu'une famille de vecteurs est ou n'est pas une base. On rappelle qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est de rang n. On en déduit qu'une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est une base si et seulement si le déterminant de la matrice carrés dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs dans la base canonique est non nul.

Exemple 3.5. On considère la famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\big((1,2,3),(0,1,4),(2,4,8)\big)$. Par la règle de Sarrus, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 2.$$

3.b. Déterminant d'une transposée

Proposition 3.6. *Soit A une matrice $n \times n$. Alors*

$$\det A = \det {}^tA.$$

Démonstration. Si A n'est pas inversible, ${}^tA$ ne l'est pas non plus, et donc, par le théorème 3.2, $\det A = 0 = \det {}^tA$.

Si A est inversible, A est produit de matrice élémentaire. D'après le théorème 3.1, il suffit donc de montrer la formule $\det A = \det {}^tA$ lorsque A est une matrice élémentaire. Or :

$${}^tD_k(\lambda) = D_k(\lambda), \quad {}^tT_{k\ell}(\lambda) = T_{\ell k}(\lambda), \quad {}^tR_{k\ell} = R_{k\ell},$$

ce montre le résultat désiré (rappelons que toutes les matrices de transvection sont de déterminant 1). □

Dans tout les résultats qui précèdent, on peut donc remplacer "ligne" par "colonne". On peut par exemple calculer un déterminant en faisant des manipulations élémentaires sur les colonnes. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est nulle ou deux colonnes égales vaut zéro, etc...

3.c. Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne

Proposition 3.7. *Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j}$ une matrice $n \times n$. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors (en notant comme précédemment $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en retirant la i-ième ligne et la j-ième colonne),*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}. \tag{VIII.3}$$

De même, si $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}. \tag{VIII.4}$$

Dans le cas (VIII.3), on dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la j-ième colonne. Dans le cas (VIII.4), qu'on l'a développé par rapport à la i-ème ligne.

Démonstration. On commence par montrer la formule (VIII.3). Lorsque $j = 1$, cette formule est exactement la définition du déterminant. Si $j \geq 2$, on se ramène au cas $j = 1$, en remplaçant la matrice A par la matrice $A' = [a'_{i,j}]_{i,j}$ obtenue à partir de A en mettant la j-ième colonne de A en premier, et donc en décalant les colonnes 1, 2,..., $j-1$ d'un rang vers la droite. En notant $(C_k)_{k=1\dots n}$ les colonnes de A et $(C'_k)_{k=1\dots n}$ les colonnes de A', on a donc :

$$(C'_1) = (C_j)$$
$$(C'_2) = (C_1), \dots, (C'_j) = (C_{j-1})$$
$$(C'_{j+1}) = (C_{j+1}), \dots, (C'_n) = (C_n).$$

La matrice A' est obtenue à partir de A par $j-1$ échanges de colonnes : on échange les colonnes j et $j-1$, puis $j-1$ et $j-2$, etc... jusqu'aux colonnes 2 et 1. Le déterminant de A' est donc égal au déterminant de A multiplié par $(-1)^{j-1}$. On déduit alors la formule (VIII.3) de la définition du déterminant de A' :

$$\det A' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1},$$

en remarquant que, par définition de A',

$$a_{i,j} = a'_{i,1} \text{ et } A_{i,j} = A'_{i,1}.$$

La formule (VIII.4) se déduite de la formule (VIII.3) par transposition. □

La formule précédente peut s'avérer très utile pour calculer un déterminant : on choisit la ligne ou la colonne qui a le plus de zéro, puis on développe par rapport à cette ligne pour réduire la taille du déterminant.

Exemple 3.8. En développant par rapport à la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times (-4) + 2 \times 14 = 40,$$

en calculant les déterminants 3×3 par la règle de Sarrus.

4. Déterminant d'un endomorphisme

4.a. Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, f un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Rappelons que f est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $n \times n$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, *matrice de représentation de f dans la base $\mathcal{B}$*, dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Lemme 4.1. *Le déterminant de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E.*

Définition 4.2. La valeur commune de tous ces déterminants est appelée le déterminant de l'endomorphisme f et noté $\det(f)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Par la formule de changement de base (cf §6),

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P,$$

où P est une matrice inversible $n \times n$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On en déduit, par le théorème 3.1 sur le déterminant d'un produit de matrices :

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \det\left(P^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P\right) &= \det(P^{-1}) \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det P \\ &= \frac{1}{\det(P)} \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det P. \end{aligned}$$

On a bien montré :

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)).$$

□

Exercice 4.3. Calculer le déterminant de la rotation R_θ de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle θ. (Correction p. 92).

Exercice 4.4. Soit $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (2,0,1)$. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e_1) = (2,2,0)$, $f(e_2) = (1,2,1)$, $f(e_3) = (2,1,2)$. Exprimer la matrice de f dans cette base, puis calculer le déterminant de f. (Correction p. 92).

4.b. Introduction à la réduction des endomorphismes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$

Proposition 4.5. *Soit f un endomorphisme de E, et, pour $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\chi_f(\lambda) = det(f - \lambda \operatorname{id}_E).$$

L'application $\lambda \mapsto \chi_f(\lambda)$ est une fonction polynôme de degré n. Le polynôme correspondant est appelé polynôme caractéristique *de f. Son terme de plus haut degré est $(-1)^n X^n$.*

Démonstration. On se donne une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E. On note $A = [a_{i,j}]$ la matrice de f dans cette base. On a donc

$$\chi_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

On rappelle que cette expression ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$. Notons, pour $1 \leq i \leq n$,

$$L_i = [a_{i,1}, \dots, a_{i,n}]$$

la i-ième ligne de A. On note ℓ_i la ligne $[\delta_{i,j}]_{1\leq j \leq n}$, c'est à dire la matrice ligne à n coefficients dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i-ième qui vaut 1. En utilisant la linéarité par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1 - \lambda\ell_1 \\ L_2 - \lambda\ell_2 \\ \vdots \\ L_n - \lambda\ell_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 - \lambda\ell_2 \\ \vdots \\ L_n - \lambda\ell_n \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \ell_1 \\ L_2 - \lambda\ell_2 \\ \vdots \\ L_n - \lambda\ell_n \end{vmatrix}.$$

On développe ensuite par rapport à la deuxième ligne :

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - \lambda\ell_3 \\ \vdots \\ L_n - \lambda\ell_n \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} L_1 \\ \ell_2 \\ L_3 - \lambda\ell_3 \\ \vdots \\ L_n - \lambda\ell_n \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \ell_1 \\ L_2 \\ L_3 - \lambda\ell_3 \\ \vdots \\ L_n - \lambda\ell_n \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ L_3 - \lambda\ell_3 \\ \vdots \\ L_n - \lambda\ell_n \end{vmatrix}.$$

En continuant à développer par rapport à chacune des lignes, jusqu'à la n-ième, on obtient une expression de $\chi_f(\lambda)$ comme une combinaison linéaire de puissances de λ, le terme de plus haut degré en λ étant :

$$(-1)^n \lambda_n \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{vmatrix} = (-1)^n \det I_n = (-1)^n.$$

□

Exercice 4.6. On suppose $n = 2$. On écrit

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Calculer $\chi_f(\lambda)$, et vérifier que le théorème précédent est vrai dans ce cas.

Exemple 4.7. Le polynôme caractéristique de I_n est $(1 - X)^n$.

Plus généralement, si la matrice $[a_{i,j}]$ de f dans une base donnée est triangulaire supérieure, son polynôme caractéristique est :

$$(a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \dots (a_{n,n} - \lambda).$$

Définition 4.8. Les zéros (dans $\mathbb{K}$) du polynôme caractéristique de f sont appelés *valeurs propres* de f.

En d'autres termes, λ est une valeur propre de f si et seulement si l'espace vectoriel $\ker(f - \lambda \operatorname{id}_E)$ est non réduit à $\{\vec{0}_E\}$, i.e si $f - \lambda \operatorname{id}_E$ est une application linéaire non injective, ou encore si et seulement si l'équation

$$f(x) = \lambda x, \tag{VIII.5}$$

a une solution non nulle $x \in E$.

Définition 4.9. L'espace vectoriel $\ker(f - \lambda \operatorname{id}_E)$ est appelé *sous-espace propre* de f pour la valeur propre λ. Les éléments non nuls de ce sous-espace propre (c'est à dire les solutions non nulles de (VIII.5)) sont appelés *vecteurs propres* pour la valeur propre λ.

Réduire l'endomorphisme f, c'est trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ a une forme simple.

Lorsque E admet une base $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est diagonale, on dit que f est *diagonalisable*. De même, lorsqu'il existe $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, on dit que f est *trigonalisable*.

Par l'exemple 4.7, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme trigonalisable est donné par $\prod_{j=1}^n (\lambda_j - X)$, où les λ_j sont les termes diagonaux de la matrice de représentation de f dans une base de trigonalisation (c'est à dire une base où cette matrice de représentation est triangulaire supérieure). Ces termes diagonaux sont donc exactement les valeurs propres de f. Pour réduire un endomorphisme, on est donc amené à calculer ses valeurs propres.

Proposition 4.10. *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E, formée de vecteurs propres de f.*

Démonstration. Soit f un endomorphisme diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On en déduit $f(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$, et donc que les $\vec{e}_j$ sont des vecteurs propres de f.

Réciproquement, supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ formée de vecteurs propres de f. Cela signifie que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$. On en déduit immédiatement que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et donc que f est diagonalisable. □

Exemple 4.11. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$: $f:(x,y)\mapsto(y,0)$ n'est pas diagonalisable. En effet, son polynôme caractéristique est X^2. Sa seule valeur propre est 0. Si il était diagonalisable, sa matrice dans une certaine base $\mathcal{B}$ serait une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont nuls, donc la matrice nulle. L'endomorphisme f serait donc la fonction constante égale au vecteur nul de $\mathbb{R}^2$, ce qui est absurde.

Réponse à quelques exercices

Exercice 1.1. Le premier déterminant vaut 2, le deuxième -4 et le troisième 14.

Exercice 2.13. Par les remplacements $(L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_1)$, $(L_3)\leftarrow(L_3)+(L_1)$ et $(L_4)-3(L_1)$, qui ne changent pas le déterminant d'après le corollaire 2.11, on obtient

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&6&9&5\\-1&-2&-4&-2\\3&6&9&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&-3\\0&0&-1&2\\0&0&0&2\end{vmatrix}=-4.$$

(Pour la deuxième égalité on a utilisé que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes diagonaux).

Exercice 3.3.
La matrice des coefficients du système est :

$$A_\lambda=\begin{bmatrix}\lambda&2&1\\1&2&3\\1&2&1\end{bmatrix}$$

On sait que le système est un système de Cramer si et seulement si cette matrice est inversible. De plus, cette condition est équivalente à la condition $\det(A_\lambda)\neq 0$. Par un calcul direct (par exemple à l'aide de la règle de Sarrus), on obtient

$$\det(A_\lambda)=4-4\lambda.$$

Le système est donc un système de Cramer si et seulement si $\lambda\neq 1$.

Exercice 4.3.
En utilisant les coordonnées polaires du plan complexe, on voit que R_θ correspond à l'application qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $e^{i\theta}z=x\cos\theta-y\sin\theta+i(x\sin\theta+y\cos\theta)$. On en déduit la formule

$$R_\theta(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta).$$

La matrice de R_θ dans la base canonique est donc :

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}.$$

Le déterminant de R_θ est $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

Exercice 4.4.
On a

$$\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

La famille $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
On vérifie facilement :

$$f(e_1)=2e_1,\quad f(e_2)=e_1+e_2,\quad f(e_3)=e_2+e_3.$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Le déterminant de f est égal au déterminant de cette matrice triangulaire supérieure, soit le produit de ses termes diagonaux, qui vaut 2.

5. Travaux dirigés

Exercice VIII.1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} i & 1 & -i \\ -i & 0 & 1 \\ -1 & 1 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 117 & 1 \\ 2 & 116 & 1 \\ 3 & 115 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice VIII.2. Calculer les déterminants suivants en développant par rapport à une ligne ou une colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Exercice VIII.3. Calculer les déterminants suivants par des manipulations sur les lignes ou les colonnes :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & c & d \\ a & b & a & c \\ a & a & a & c \end{vmatrix},$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

Exercice VIII.4. En raisonnant par récurrence sur la taille n de la matrice, et en utilisant la définition du déterminant, montrer la proposition 2.7.

Exercice VIII.5. Soit $\vec{x} = (1, 2, a)$, $\vec{y} = (0, 2, 3)$ et $\vec{z} = (-1, 2, 1)$. Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice VIII.6. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles :

$$A_m = \begin{bmatrix} m & 2 & m+1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+1 & 2m+2 \end{bmatrix}, \qquad B_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

Exercice VIII.7. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f\big((x, y)\big) = (x + y, y).$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, puis les vecteurs propres de f.

b. L'endomorphisme f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ?

c. Mêmes questions avec l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$g\big((x, y)\big) = (2x + y, y).$$

Exercice VIII.8. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 \\ -4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Vérifier que les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (3, 2, 1)$ et $\vec{v}_3 = (0, 1, 0)$ sont des vecteurs propres de f. Déterminer les valeurs propres associées.

b. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice A' de f dans $\mathcal{B}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Exercice VIII.9. Soit f la rotation de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et d'angle θ, et R_θ sa matrice dans la base canonique.

a. Calculer R_θ. Déterminer le polynôme caractéristique de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?

b. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ qui a pour matrice R_θ dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Déterminer les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Exercice VIII.10. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de représentation dans une base de $\mathbb{R}^n$ est une des matrices élémentaires définie au chapitre II, §3.a. En distinguant 3 cas (matrices de dilatation, de transvection et de transposition), calculer le polynôme caractéristique de f, ses valeurs propres, et déterminer si f est diagonalisable.

Exercice VIII.11. On fixe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, pour chacun des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrices de représentation les matrices suivantes dans $\mathcal{B}$, le polynôme caractéristique, les valeurs propres et leurs ordres de multiplicité. Déterminer également leur sous-espaces propres et dire si ils sont diagonalisables.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IX. Quelques techniques en algorithmique

Le chapitre IV a introduit la notion de complexité d'un algorithme. Ici, on présente deux techniques très classiques pour définir des algorithmes avec une complexité plus faibles (*i.e.*, plus rapide) : la méthode diviser pour régner et la programmation dynamique.

1. Diviser pour régner

Alice choisit un nombre entre 1 et 100 que Bob doit deviner. À chaque fois que Bob se trompe, Alice lui dit si son nombre est plus grand ou plus petit. Quelle stratégie pour Bob ? S'il propose 1 et que Alice dit "plus grand", il lui restera encore 99 possibilités. S'il propose 80 et que Alice dit "plus grand", il ne lui restera plus que 20 possibilités, mais si elle dit "plus petit" il lui en restera quand même 79. Il choisit donc de proposer 50 : qu'Alice dise "plus grand" ou "plus petit", il ne lui restera que la moitié des possibilités à tester. Et il utilisera la même stratégie sur la moitié restante : à chaque fois proposer le nombre médian. Comme Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, Bob a fait une *recherche dichotomique*.

La recherche dichotomique est un des nombreux algorithmes utilisant la méthode *diviser pour régner*, qui fonctionne en trois temps :

Diviser : découper un problème initial en sous-problèmes ;

Régner : résoudre les sous-problèmes (récursivement ou directement) ;

Combiner : en déduire une solution au problème initial.

Dans le cas de la recherche dichotomique :

Diviser : Bob découpe en deux l'intervalle de recherche en proposant un nombre ;

Régner : l'un des intervalles est éliminé par la réponse d'Alice, tandis que Bob relance récursivement sur l'autre (sauf s'il a trouvé le nombre choisi par Alice) ;

Combiner : simplement se rappeler du nombre trouvé.

Pour trouver un nombre entre 1 et n, le nombre $C(n)$ de proposition que Bob doit faire dans le pire des cas vérifie donc l'équation

$$C(n) = C\left(\frac{n}{2}\right) + 1,$$

où 1 correspond à la question de Bob et $C\left(\frac{n}{2}\right)$ au nombre de comparaisons effectuées sur l'intervalle non éliminé par la réponse d'Alice. On calcule alors en itérant :

$$C(n) = C\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = C\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 = \ldots = C\left(\frac{n}{2^p}\right) + p.$$

Avec $p = log_2(n)$ on a $2^p = n$ et donc $C(n) = O(\log_2(n))$ (car $C(1)$ est une constante). C'est bien mieux que d'essayer les n nombres l'un après l'autre !

Un autre exemple classique est le tri : comment classer n nombres du plus petit au plus grand ? Le *tri par insertion* consiste à insérer un à un les nombres à leur place dans un tableau où ils seront triés. Si, pour insérer un nombre, on le compare à tous ceux déjà dans le tableau trié, alors le nombre maximal $C(n)$ de comparaisons effectuées sera

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k = O(n^2).$$

En utilisant une recherche dichotomique pour insérer chaque nombre à sa place on diminue le nombre de comparaison :

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} O(\log_2(k)) = O(n \log_2(n)).$$

On peut aussi réaliser un *tri fusion* qui repose sur la méthode diviser pour régner :

Diviser : partager les nombres à trier en deux sous-ensembles de même taille ;

Régner : trier récursivement chaque sous-ensemble (rien à faire si un seul nombre) ;

Combiner : *fusionner* les deux sous-ensembles triés en un seul ensemble trié.

La fusion de deux ensembles triés se réalise comme suit : à chaque étape on compare le plus petit élément d'un ensemble avec le plus petit de l'autre et on met le plus petit dans l'ensemble final. On fait donc au plus autant de comparaisons qu'il y a de nombres à fusionner. Le nombre $C(n)$ de comparaisons nécessaire à trier un ensemble de n nombres vérifie donc l'équation

$$C(n) = 2C\left(\frac{n}{2}\right) + n,$$

où n correspond au nombre de comparaisons pour fusionner et $2C\left(\frac{n}{2}\right)$ à celui nécessaire à trier chacun des deux sous-ensembles. On calcule en itérant :

$$C(n) = 2C\left(\frac{n}{2}\right)+n = 2\left(2C\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right)+n = 2^2C\left(\frac{n}{2^2}\right)+2n = \ldots = 2^pC\left(\frac{n}{2^p}\right)+pn$$

Avec $p = log_2(n)$ on a $2^p = n$ et donc $C(n) = O(n \log_2(n))$.

Il existe de nombreux autres exemples. En TD/TP on verra comment multiplier deux matrices $n \times n$ avec moins de n^3 multiplications !

2. Programmation dynamique

Le concept de *programmation dynamique* a été introduit au début des années 1950. Comme diviser pour régner, il consiste à résoudre un problème en le décomposant en sous-problèmes. Mais contrairement à diviser pour régner, ces sous-problèmes ne sont pas toujours indépendants et un même calcul peut apparaître plusieurs fois. L'idée est alors de stocker les résultats des calculs déjà faits en mémoire et de vérifier, avant de faire tout nouveau calcul, s'il n'a pas déjà été fait.

Illustrons ce concept un peu abstrait sur un exemple, celui du *rendu de monnaie*. On cherche à rendre n euros avec des pièces de 1, 2 et 5 euros en en utilisant le moins possible. Soit $r(n)$ ce nombre minimal de pièces à rendre. Si la première pièce que l'on rend vaut x, il restera ensuite $n-x$ euros à rendre, qu'on pourra rendre avec $r(n-x)$ pièces (par définition de r). Avec la première pièce, cela fera $r(n-x)+1$ pièces. Il suffit donc d'essayer pour tous les x et de prendre le minimum :

$$r(n) = \min_{x\in\{1,2,5\}} r(n-x)+1.$$

On est donc ramenés à quatre sous-problèmes, un pour chaque valeur de x. Mais ceux-ci ne sont pas indépendants. Par exemple, pour calculer $r(n-1)$ on va avoir besoin de $r(n-2)$, $r(n-3)$ et $r(n-5)$, mais on a déjà eu besoin de $r(n-2)$ pour calculer $r(n)$! On crée donc un tableau de n cases, et quand on a besoin de $r(k)$ on regarde dans la $k^{\text{ème}}$ case de ce tableau si la valeur de $r(k)$ y est déjà : si oui on la lit, sinon on la calcule et on met à jour cette case du tableau. En C, avec un pointeur `tab` sur une zone mémoire contenant $n+1$ entiers nuls, cela donne :

```
int rendu(int* tab, int n)
{
 if (n==1||n==2||n==5) tab[n]=1;
 if (tab[n]>0) return tab[n];
 int r=min(rendu(tab,n-1),rendu(tab,n-2));
 if (n>5) r=min(c,rendu(tab,n-5));
 tab[n]=r+1;
 return r+1;
}
```

Quid de la complexité de cet algorithme si, par exemple, on la mesure par le nombre $M(n)$ d'appel à la fonction `min` ? La façon dont les appels récursifs se font n'est pas très claire, mais à chaque fois qu'il y a deux `min` dans un appel à `rendu`, il y a une case du tableau qui est remplie. Or on ne remplit qu'au plus une fois chacune des n cases de ce tableau. Donc $M(n) \in O(n)$: la complexité est linéaire. Soulignons que si on n'utilisait pas de tableau pour éviter de refaire plusieurs fois le même calcul, la complexité vérifierait :

$$M(n) = 2 + M(n-1) + M(n-2) + M(n-5).$$

Ce qui ferait une complexité exponentielle car on montre par induction qu'il existe $c>0$ et $\mu>1$ tel que $M(n)\geq c\mu^n$. En effet, c'est vrai pour $n\leq 5$ quitte à choisir c assez petit, et si c'est vrai jusqu'à $n-1$, alors ça l'est pour n si

$$2+\mu^{n-1}+\mu^{n-2}+\mu^{n-5}\geq \mu^n,$$

ce qui est assuré pour $\mu = 3^{1/5} > 1$.

Table des matières de la deuxième partie