

Introduction

Ce polycopié est destiné aux étudiants du tronc commun de L1 mathématiques/informatique de l'institut Galilée et concerne le cours *algèbre linéaire et algorithmique*. Le sujet principal est l'algèbre linéaire, qui généralise et formalise l'étude des systèmes linéaires. Cette théorie peut être vue comme l'étude systématique d'ensembles (les espaces vectoriels) munis de deux opérations : une loi de composition interne appelée addition et une multiplication par des nombres réels ou complexes. Ces notions de mathématiques seront illustrées et appliquées dans des cours, travaux dirigés et travaux pratiques d'algorithmique.

Le chapitre I ne concerne pas directement l'algèbre linéaire : il s'agit d'une introduction rapide aux polynômes, qui seront utilisés notamment dans le chapitre sur les déterminants (tome II) et dans la partie informatique du cours. On s'intéresse ensuite (chapitre II) à la résolution de systèmes linéaires généraux par la méthode du pivot de Gauss. Ces systèmes linéaires peuvent s'écrire de manière plus succincte en utilisant des tableaux de nombres, ou matrices, qui sont étudiés de manière plus systématique au chapitre III. Dans les deux tomes suivant, il sera question de matrices et polynômes en langage C , d'algorithmes, d'espaces vectoriels, d'applications linéaires et de déterminants.

Nous utiliserons souvent des lettres grecques (en particulier α , β , γ , δ , λ , μ , ν). Un alphabet grec est donné en appendice (p. 39).

Les lecteurs et lectrices sont invités à lire attentivement et de manière active le polycopié, en apprenant et refaisant les démonstrations des résultats importants et en faisant les exercices corrigés proposés. **L'évaluation des connaissances (en contrôle continu et lors des partiels et examens) portera en grande partie sur le cours (définitions, résultats et leurs démonstrations).**

Une feuille de travaux dirigés et une liste d'exercices à préparer pour le contrôle continu est donnée à la fin de chaque chapitre. Par ailleurs des feuilles d'exercices à faire en ligne (avec le logiciel WIMS) seront proposés régulièrement. Le polycopié, les archives des années précédentes et les liens pour se connecter aux exercices en ligne sont disponibles sur la page web :

<https://www.math.univ-paris13.fr/~duyckaer/enseignement.html>

I. Les polynômes

Ce chapitre est indépendant des autres. Il sera utilisé dans la partie “algorithmique” du cours et dans le chapitre VIII de ce cours, qui est consacré aux déterminants.

Dans ce chapitre, la lettre \mathbb{K} désigne le corps des nombres réels \mathbb{R} ou celui des nombres complexes \mathbb{C} . Les éléments de \mathbb{K} sont appelés “nombres” ou “scalaires”. Une grande partie de ce chapitre est valable dans un corps (commutatif) quelconque.

1. Définitions

1.a. Polynômes comme suites finies

Un polynôme P sur \mathbb{K} (ou à coefficients dans \mathbb{K}) est la donnée d’une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d’éléments de \mathbb{K} telle qu’il existe un entier $p \geq 0$ avec

$$\forall n \geq p, \quad a_n = 0.$$

Les nombres a_n sont appelés les *coefficients* de P . Le plus grand nombre d tel que $a_d \neq 0$ est appelé *degré* de P et noté $\deg P$ ou $\deg(P)$. Le coefficient a_d correspondant à ce degré est appelé *coefficient dominant* de P . Le polynôme $(a_n)_{n \geq 0}$ tel que $a_n = 0$ pour tout n est appelé le *polynôme nul* et noté 0 . Par convention $\deg 0 = -\infty$.

Exemple 1.1. La suite $(1, 2, 0, 0, 0, \dots)$ est un polynôme de degré 1 ($a_0 = 1, a_1 = 2$, les \dots signifient que $a_n = 0$ si $n \geq 2$).

La suite $(2^n)_{n \geq 0}$ n’est pas un polynôme.

1.b. Addition

Soit $P = (a_n)_{n \geq 0}$ et $Q = (b_n)_{n \geq 0}$ deux polynômes. La *somme* $P + Q$ de P et Q est par définition la suite $(a_n + b_n)_{n \geq 0}$. C’est aussi un polynôme. Ceci définit une addition sur l’ensemble des polynômes, qui est commutative et associative :

$$P + Q = Q + P, \quad (P + Q) + R = P + (Q + R).$$

Du fait de l’associativité, on peut noter sans ambiguïté $P + Q + R$ la somme de trois polynômes.

Proposition 1.2. *Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .*

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

Si $\deg P \neq \deg Q$,

$$\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q).$$

Démonstration. Soit $n = \deg P, p = \deg Q$. On a donc :

$$P = (a_j)_{j \geq 0}, \quad Q = (b_j)_{j \geq 0}$$

avec $a_j = 0$ si $j > n, b_j = 0$ si $j > p, a_n \neq 0, b_p \neq 0$. Par définition de l’addition des polynômes,

$$P + Q = (a_j + b_j)_{j \geq 0}.$$

Puisque $a_j + b_j = 0$ dès que $j > \max(p, n)$, on a bien que le degré de $P + Q$ est au plus égal à $\max(p, n)$.

Supposons maintenant $n \neq p$. Pour fixer les idées, on suppose $n > p$. On a donc $b_n = 0$. Le n -ième coefficient de $P + Q$ est $a_n + b_n = a_n \neq 0$. Le polynôme $P + Q$ est donc exactement de degré $n = \max(\deg P, \deg Q)$. Le cas $n < p$ se déduit de la commutativité de l’addition et du cas $n > p$. \square

1.c. Indéterminée

On s’empresse d’adopter une notation plus commode que la notation $(a_n)_{n \geq 0}$ pour désigner les polynômes. On fixe une lettre, généralement X , appelée *indéterminée*. Soit $P = (a_n)_{n \geq 0}$ un polynôme de degré d . On note ce polynôme :

$$(I.1) \quad P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0 = \sum_{j=0}^d a_j X^j.$$

Exemple 1.3. Le polynôme $(1, 2, 0, 0, 0, \dots)$ est noté $2X + 1$. Le polynôme

$$(0, 0, 0, 9, 4, 0, 3, 0, 0, 0, \dots)$$

est noté $3X^6 + 0X^5 + 4X^4 + 9X^3 + 0X^2 + 0X + 0$ ou plus simplement $3X^6 + 4X^4 + 9X^3$.

Dans (I.1), les puissances sont rangées dans l’ordre décroissant. On peut aussi les ranger dans l’ordre croissant. De fait, par la définition et la commutativité de l’addition des polynômes, on a :

$$a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0 = a_0 + a_1 X + \dots + a_{d-1} X^{d-1} + a_d X^d.$$

Notation 1.4. L’ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et d’indéterminée X est noté $\mathbb{K}[X]$. Un polynôme P est parfois noté $P(X)$ lorsqu’on veut insister sur le fait que la lettre X désigne l’indéterminée.

Remarque 1.5. Le polynôme de degré 0, $(\lambda, 0, 0, \dots)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ est noté simplement λ . Cela permet d’identifier \mathbb{K} à l’ensemble des polynômes de degré 0 sur \mathbb{K} . Cette identification est compatible avec la définition de l’addition sur $\mathbb{K}[X]$: $\lambda + \mu$ a la même valeur que l’on interprète le “+” comme symbole de l’addition sur \mathbb{K} ou $\mathbb{K}[X]$.

1.d. Multiplication

Soit $P = \sum_{j=0}^d a_j X^j$ et $Q = \sum_{j=0}^{d'} b_j X^j$ deux polynômes, $d = \deg P$, $d' = \deg Q$. Par définition, le produit PQ de P et Q est le polynôme

$$(I.2) \quad PQ = \sum_{j=0}^{d+d'} \left(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \right) X^j.$$

Il s'obtient en développant l'expression $\sum_{k=0}^d a_k X^k \sum_{\ell=0}^{d'} b_\ell X^\ell$ et en utilisant les règles de calcul usuelles sur l'addition et la multiplication des scalaires, et la règle : $X^k X^\ell = X^{k+\ell}$.

Remarque 1.6. Dans l'expression (I.2), $\sum_{k+\ell=j}$ signifie que la somme porte sur tous les indices (entiers naturels) k et ℓ tels que $k + \ell = j$. Par exemple :

$$\sum_{k+\ell=2} a_k b_\ell = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

Il est très important de maîtriser ce genre de notation.

La formule

$$(I.3) \quad \deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

découle immédiatement de la définition de la multiplication des polynômes. Lorsque P ou Q est nulle, les deux termes de cette égalité valent $-\infty$ (par convention $-\infty$ plus un entier vaut $-\infty$). Lorsque P et Q sont non nuls, le coefficient dominant de PQ est $a_d b_{d'}$. On a en particulier

$$PQ = 0 \iff (P = 0 \text{ ou } Q = 0).$$

La multiplication des polynômes vérifie aussi les règles de calcul usuelles :

Proposition 1.7. *La multiplication des polynômes est commutative, associative, et distributive par rapport à l'addition : si $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,*

$$PQ = QP, \quad (PQ)R = P(QR) \text{ et } P(Q + R) = PQ + PR.$$

Démonstration. On ne démontre que l'associativité, la preuve des autres propriétés est laissée au lecteur. Soit $P = \sum_{k=0}^{d_1} a_k X^k$, $Q = \sum_{\ell=0}^{d_2} b_\ell X^\ell$ et $R = \sum_{m=0}^{d_3} c_m X^m$ trois polynômes. On doit vérifier

$$(I.4) \quad (PQ)R = P(QR).$$

En utilisant la définition de la multiplication, on obtient $PQ = \sum_{j=0}^{d_1+d_2} \left(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \right) X^j$, puis

$$(PQ)R = \sum_{r=0}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{j+m=r} \left(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \right) c_m X^r \stackrel{\star}{=} \sum_{r=0}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{k+\ell+m=r} a_k b_\ell c_m X^r.$$

De même, $QR = \sum_{s=0}^{d_2+d_3} \sum_{\ell+m=s} b_\ell c_m X^s$ et donc

$$P(QR) = \sum_{r=0}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{k+s=r} a_k \left(\sum_{\ell+m=s} b_\ell c_m \right) X^r \stackrel{\star}{=} \sum_{r=0}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{k+\ell+m=r} a_k b_\ell c_m X^r.$$

D'où $(PQ)R = P(QR)$. \square

Exercice 1.8. Se convaincre que les deux égalités \star ci-dessus sont bien impliquées par la distributivité de la multiplication sur l'addition. On pourra commencer par écrire explicitement ces égalités dans le cas $d_1 = d_2 = d_3 = 1$.

En pratique, pour calculer le produit de deux polynômes, on n'utilise pas directement la formule (I.2), mais simplement les règles de calcul usuelles. Par exemple :

$$\begin{aligned} (X^3 + 2X^2 - 1)(X^2 + 7) &= X^3 X^2 + 7X^3 + 2X^2 X^2 + 14X^2 - X^2 - 7 \\ &= X^5 + 7X^3 + 2X^4 + 13X^2 - 7. \end{aligned}$$

Remarque 1.9. Le produit de deux polynômes a_0 et b_0 de degré 0 (au sens du produit sur $\mathbb{K}[X]$) est bien égal au produit des deux scalaires a_0 et b_0 (au sens du produit sur \mathbb{K}).

2. Premières propriétés

2.a. Division euclidienne

Théorème 2.1. *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul. Il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R dans $\mathbb{K}[X]$ tels que :*

$$A = QB + R \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Définition 2.2. Lorsque $R = 0$ dans le théorème ci-dessus, c'est à dire lorsqu'il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = QB$, on dit que B *divise* A , que A est *divisible* par B , ou que B est un *diviseur* de A .

Démonstration. Existence.

Lorsque $A = 0$, on peut choisir $Q = 0$ et $R = 0$. Supposons A non nul, et notons $A = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, $B = b_p X^p + b_{p-1} X^{p-1} + \dots + b_1 X + b_0$, avec $n = \deg A$, $p = \deg B$. Les polynôme Q et R se construisent par récurrence, en utilisant une "division euclidienne partielle", résumée dans le lemme suivant, qui consiste à diviser seulement les termes de plus haut degré.

Lemme 2.3. *Soit $G \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg G \geq \deg B$. On note d le degré de G et $G = \sum_{k=0}^d g_k X^k$. Soit $S = \frac{g_d}{b_p} X^{d-p}$. Alors*

$$(I.5) \quad \deg(G - BS) < \deg G.$$

Preuve du lemme. Le polynôme BS est de degré $d - p + p = d$, et son coefficient dominant (le coefficient de X^d) est $\frac{g_d}{b_p} \times b_p = g_d$. On en déduit comme annoncé que $G - BS$ est au plus de degré $d - 1$. \square

Pour montrer l'existence de Q et R , on construit par récurrence deux suites finies $(A_j)_{j=0\dots J}$ et $(Q_j)_{j=1\dots J}$, avec $A_0 = A$ et telles que :
pour tout $j = 0, \dots, J$,

$$(I.6) \quad A = A_j + (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_j)B$$

$$(I.7) \quad d^\circ A_j < d^\circ A_{j-1}$$

et

$$(I.8) \quad d^\circ A_J < d^\circ B.$$

Soit $j \geq 1$. Supposons $A_0, A_1, \dots, A_j, B_1, \dots, B_j$ connus et vérifient (I.6), (I.7)
On distingue deux cas :

- ou bien $\deg(A_j) < \deg(B)$, on pose $J = j$ et on arrête la construction ;
- ou bien $\deg(A_j) \geq \deg(B)$. On utilise alors le lemme qui nous donne Q_{j+1} , tel que $A_{j+1} = A_j - BQ_{j+1}$ vérifie $d^\circ A_{j+1} < d^\circ A_j$. Par définition de A_{j+1} et l'hypothèse de récurrence (I.6), on a bien

$$A = A_{j+1} + (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_j + Q_{j+1})B.$$

Par (I.5), la suite $\deg(A_j)$ est strictement décroissante. Puisque c'est une suite d'éléments de $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, la construction précédente doit s'arrêter pour un certain J . Pour lequel (I.8) est vérifié. D'après (I.6) (au rang J) et (I.8), on a bien obtenu une division euclidienne de A par B , de quotient $Q = Q_1 + \dots + Q_J$ et de reste A_J .

Unicité.

Supposons que $A = QB + R = SB + T$, où les degrés de R et T sont strictement inférieurs à celui de B . On en tire :

$$(I.9) \quad R - T = (S - Q)B \quad \text{et} \quad \deg(R - T) < \deg(B).$$

On montre $Q = S$ par l'absurde. Si $Q \neq S$, alors $\deg(S - Q) \geq 0$. Donc

$$\deg((S - Q)B) = \deg(S - Q) + \deg(B) \geq \deg(B),$$

ce qui contredit (I.9).

Donc $Q = S$, d'où $R = T$ par (I.9). \square

En pratique, pour calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un polynôme par un autre, on calcule les suites A_j, Q_j de la démonstration précédente en posant la division euclidienne.

Exemple 2.4. Division de $X^3 + 2X^2 + X + 1$ par $X^2 + 1$

$X^3 + 2X^2 + X + 1$	$X^2 + 1$
$- X^3$	$X + 2$
$2X^2 + X + 1$	
$- 2X^2$	$- 2$
$X + 1$	$- 1$

Le résultat s'écrit : $X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X + 2) - 1$.

Quotient : $X + 2$, reste : -1 .

Dans cet exemple, on a $Q_1 = X$, $A_1 = 2X^2 + 1$, $Q_2 = 2$ et $A_2 = -1$.

Exercice 2.5. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

$$A = X^4 - 2X^2 - X + 1, B = X^2 + X;$$

$$A = X^6 + 4X^4 - X^2 + 1, B = X^2 + 1.$$

(voir correction p. 9).

2.b. Fonctions polynomiales

Définition 2.6. On appelle *fonction polynomiale* sur \mathbb{K} toute fonction de la forme

$$\tilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

où les coefficients $(a_j)_{j=0\dots n}$ sont dans \mathbb{K} . Le polynôme $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ est appelé *polynôme associé* à la fonction \tilde{P} .

Remarque 2.7. Il faut toujours avoir en mémoire la différence entre la fonction polynomiale \tilde{P} (et sa variable x) et le polynôme P (et son indéterminée X) ; même si, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on omet d'écrire le symbole \sim .

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{K}$, on notera désormais $P(a)$ la valeur prise par la fonction \tilde{P} au point a .

Proposition 2.8. *Le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X - \alpha$ est le polynôme constant égal à $P(\alpha)$.*

Démonstration. La division euclidienne de P par $X - \alpha$ s'écrit :

$$P = (X - \alpha)Q + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < 1.$$

Puisque $\deg(R) < 1$, le polynôme R est une constante c et $P(\alpha) = c$. \square

2.c. Polynôme dérivé

Définition 2.9. Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme sur \mathbb{K} . On appelle *polynôme dérivé* de P le polynôme :

$$P' = na_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1} X^{n-2} + \dots + 2a_2 X + a_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_{i+1} X^i.$$

I. Les polynômes

On note $P'', P''', P^{(4)}, \dots, P^{(k)}$ la suite des polynômes dérivés successifs. On pose enfin $P^{(0)} = P$.

Exemple 2.10. Soit $P = 5 + iX^2 + 4X^3$. Alors $P' = 2iX + 12X^2$, $P'' = 2i + 24X$ etc...

Remarquons que la fonction polynôme associée à la dérivée¹ P' d'un polynôme réel P est exactement la dérivée² de la fonction polynôme associée à P .

Proposition 2.11. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$(I.10) \quad \deg P \geq 1 \implies \deg(P') = \deg(P) - 1$$

$$(I.11) \quad P' = 0 \iff P \text{ est constant}$$

$$(I.12) \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q', \quad P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

$$(I.13) \quad (PQ)' = P'Q + PQ'$$

Démonstration. La propriété (I.10) se déduit immédiatement des définitions du degré et du polynôme dérivé.

Preuve de (I.11). Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de degré n . Alors

$$P' = 0 \iff \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = 0 \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, a_k = 0.$$

En particulier, si $n \geq 1$, $a_n = 0$, une contradiction. Donc $n = 0$ ou $n = -\infty$, ce qui signifie exactement que P est constant.

La preuve de (I.12) est directe et laissée au lecteur.

Preuve de (I.13). On commence par prouver (I.13) lorsque $P = X^n$, $n \geq 1$. On note

$$Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k, \quad p = \deg(Q).$$

Alors

$$P' = nX^{n-1}, \quad Q' = \sum_{k=1}^p k b_k X^{k-1}, \quad PQ = \sum_{k=0}^p b_k X^{k+n}.$$

et donc

$$P'Q + PQ' = \sum_{k=0}^p n b_k X^{k+n-1} + \sum_{k=0}^p k b_k X^{k+n-1} = \sum_{k=0}^p (k+n) b_k X^{k+n-1} = (PQ)'$$

On démontre maintenant le cas général. On commence par remarquer que si $N \geq 1$, P_1, \dots, P_N sont des polynômes et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ des scalaires, alors (I.12) et une récurrence élémentaire nous donnent :

$$(I.14) \quad \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k P_k \right)' = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k'$$

1. au sens de la dérivation des polynômes
2. au sens de la dérivation des fonctions réelles de la variable réelle

Supposons P non nul (sinon le résultat est évident). On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n = \deg(P)$. Par (I.14),

$$\begin{aligned} (PQ)' &= \sum_{k=0}^n a_k (X^k Q)' \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left[(X^k)' Q + X^k Q' \right] = \sum_{k=1}^n a_k k X^{k-1} Q + \sum_{k=0}^n a_k X^k Q' = P'Q + PQ', \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. \square

3. Racines

3.a. Cas général

Définition 3.1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une *racine* (ou un *zéro*) de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Théorème 3.2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Un élément α de \mathbb{K} est racine de P si, et seulement si, P est divisible par $X - \alpha$.

Démonstration. D'après la proposition 2.8 $P = Q(X - \alpha) + P(\alpha)$, pour un certain $Q \in \mathbb{K}[X]$. Par conséquent P est divisible par $X - \alpha$ si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$. \square

Exercice 3.3. Soit P le polynôme sur \mathbb{R} défini par $P = X^3 - X^2 - 3X + 3$.

a. Déterminer une racine évidente de P .

b. En déduire une expression de P sous la forme d'un produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré 2.

c. En déduire l'ensemble des racines de P .

(Correction p. 9.)

Définition 3.4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une racine d'ordre r , ou de *multiplicité* r , de P si $P = (X - \alpha)^r Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

D'après le théorème 3.2, une racine est toujours de multiplicité au moins 1.

Lorsque $r = 1$, on dit que la racine est simple.

Lorsque $r = 2$, on dit que la racine est double.

Exemple 3.5. Le polynôme $P = 3(X - 1)^2(X - i)(X + i)^3$ a pour racines 1, i et $-i$. 1 est une racine double, i est une racine simple, et $-i$ est une racine d'ordre 3.

Un trinôme complexe du second degré de discriminant non nul a deux racines simples. Un trinôme du second degré de discriminant nul a une racine double.

Définition 3.6. On dit que le polynôme P a exactement n racines *comptées avec leur ordre de multiplicité* (ou avec *multiplicité*) lorsque la somme des multiplicités de ses racines est exactement n .

Exemple 3.7. Le polynôme P de l'exemple 3.5 a 3 racines distinctes, mais 6 racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Avertissement 3.8. Il y a donc deux manières de compter le nombre de racines d'un polynôme. L'expression "le polynôme P a n racines" est ambiguë et ne doit jamais être utilisée sans précision supplémentaire.

Remarque 3.9. Si P a r racines et Q a s racines (comptées avec leur ordre de multiplicité), alors PQ a $r + s$ racines (comptées avec leur ordre de multiplicité). Cette propriété n'est plus valable lorsque l'on compte les racines distinctes des polynômes.

Exemple 3.10. Si l'on compte les racines avec multiplicité, le polynôme $P = (X-1)^2$ a deux racines, le polynôme $Q = (X-1)$ a 1 racine, et le polynôme PQ a bien $2 + 1$ racines.

Mais P , Q et PQ ont chacun une seule racine distincte.

Théorème 3.11. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La racine $\alpha \in \mathbb{K}$ de P est de multiplicité r si et seulement si, pour tout k entre 0 et $r-1$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Démonstration. Si α est racine de multiplicité r , alors $P = (X-\alpha)^r Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

En dérivant, on obtient :

$$P' = r(X-\alpha)^{r-1}Q + (X-\alpha)^r Q' = (X-\alpha)^{r-1} (rQ + (X-\alpha)Q'),$$

de la forme $(X-\alpha)^{r-1}Q_1$ avec $Q_1(\alpha) = rQ(\alpha) \neq 0$. Donc, lorsque $r > 1$, $P'(\alpha) = 0$.

En itérant ce raisonnement, on obtient :

$$\text{pour tout } k \leq r, P^{(k)} \text{ est de la forme } (X-\alpha)^{r-k}Q_k \text{ avec } Q_k(\alpha) \neq 0.$$

Donc lorsque $k < r$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$. De plus $P^{(r)} = Q_r$ avec $Q_r(\alpha) \neq 0$ et donc $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Réciproquement, supposons $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Soit s la multiplicité de α . D'après ce qui précède

$$(I.15) \quad P(\alpha) = \dots = P^{(s-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(s)}(\alpha) \neq 0$$

On montre $s = r$ par l'absurde :

- si $s > r$ alors, on aurait $P^{(r)}(\alpha) = 0$ par (I.15), ce qui est contraire aux hypothèses.
- si $s < r$ alors, on aurait $P^{(s)}(\alpha) = 0$, contredisant (I.15).

Donc $s = r$ et α est de multiplicité r . □

3.b. Polynômes à coefficients complexes

Théorème 3.12 (Théorème de D'Alembert). (*admis*) Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine.

Corollaire 3.13. Tout polynôme P , de degré $n \geq 1$, de $\mathbb{C}[X]$ admet exactement n racines complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité).

Démonstration. Par récurrence sur n . Dans toute la démonstration, les racines sont comptées avec leur ordre de multiplicité.

- Initialisation : si $n = 1$, le résultat est immédiat.
- Hérité : supposons que tout polynôme de degré $n-1$ de $\mathbb{C}[X]$ admette exactement $n-1$ racines complexes.

Si P est un polynôme de degré n , d'après le théorème de D'Alembert, il admet au moins une racine α .

Il existe donc Q , de degré $n-1$, tel que $P = (X-\alpha)Q$. D'après l'hypothèse de récurrence, Q admet $n-1$ racines $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. Par conséquent, P admet les n racines $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. □

Proposition 3.14. Soient f et g deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , définies par $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ et $g(x) = b_p x^p + \dots + b_1 x + b_0$, avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$. Si

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = g(x),$$

alors $p = n$ et $a_i = b_i$ pour tout i .

Démonstration. S'il existait i tel que $a_i \neq b_i$, la fonction polynomiale $f - g$ serait de degré $k \geq i$. Elle aurait au plus k racines complexes, donc au plus k racines dans \mathbb{K} , et ne serait pas identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

Remarque 3.15. Il est possible de définir $\mathbb{K}[X]$ dès que \mathbb{K} a une structure de corps (un corps est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication vérifiant les règles de calcul usuelles et certaines propriétés d'inversibilité pour ces opérations). Lorsque \mathbb{K} est un corps fini (par exemple $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), la proposition 3.14 est fautive : deux polynômes distincts peuvent définir la même fonction polynôme. La notion de corps sera vu en 2ème année de licence.

3.c. Polynômes à coefficients réels

Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, un polynôme à coefficients réels peut être considéré comme un polynôme à coefficients complexes, et ses racines réelles sont aussi des racines complexes. En particulier, un polynôme réel a au plus n racines réelles. De plus, pour un tel polynôme P , si $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$ (\overline{z} désigne le nombre complexe conjugué de z).

La proposition suivante donne les propriétés des racines complexes d'un polynôme réel :

Proposition 3.16. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors $\bar{\alpha}$ l'est aussi. De plus, α et $\bar{\alpha}$ ont même ordre de multiplicité.

Démonstration. Soit r l'ordre de multiplicité de α . On a donc $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout k entre 0 et $r - 1$, et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Donc, $P^{(k)}(\bar{\alpha}) = \overline{P^{(k)}(\alpha)} = \bar{0} = 0$ pour tout $k \leq r - 1$ et $P^{(r)}(\bar{\alpha}) = \overline{P^{(r)}(\alpha)} \neq 0$. \square

Corollaire 3.17. Tout polynôme P , de degré impair de $\mathbb{R}[X]$ admet au moins une racine réelle.

Démonstration. En effet, un nombre complexe α est réel si et seulement si $\alpha = \bar{\alpha}$. Il découle donc de la proposition 3.16 que les racines complexes non réelles de P peuvent se ranger par paires de racines de même multiplicité. Il y a donc un nombre pair de racines complexes non réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité). Puisque, par le corollaire 3.13, P a exactement $\deg(P)$ racines, le nombre de racines réelles de P est impair, et donc non nul. \square

Exercice 3.18. Donner une autre démonstration du corollaire 3.17, en étudiant la fonction polynôme associée à P et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 3.19.

d. Montrer que i est racine double du polynôme $P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$.

e. Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $P = X^5 + aX^4 + bX^3 - bX^2 - aX - 1$ admette 1 comme racine de plus grande multiplicité possible.

4. Complément : polynômes irréductibles

4.a. Cas général

Définition 4.1. Un polynôme P non constant qui vérifie la condition :

si P est produit de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, l'un des deux est constant est dit *irréductible* dans $\mathbb{K}[X]$.

Par convention, les polynômes constants ne sont pas irréductibles.

Exemple 4.2. Un polynôme de degré 1 est irréductible.

Théorème 4.3. Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme P non constant se décompose en produit de polynômes irréductibles

Démonstration. Par récurrence sur le degré n de P :

Initialisation. Si $n = 1$ alors le polynôme est irréductible.

Hérédité. Supposons que tout polynôme de degré $< n$ soit produit de polynômes irréductibles.

Soit P un polynôme de degré n .

— Si P est irréductible, le résultat est obtenu.

— Si P n'est pas irréductible, $P = P_1 P_2$ avec $\deg(P_1) \geq 1$ et $\deg(P_2) \geq 1$. $\deg(P_1) + \deg(P_2) = \deg(P) = n$ donc $\deg(P_1) < n$ et $\deg(P_2) < n$. Par hypothèse de récurrence P_1 et P_2 sont tous les deux produits de polynômes irréductibles donc P est aussi produit de polynômes irréductibles. \square

4.b. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Théorème 4.4. Les polynômes de degré 1 sont les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Démonstration. D'après le théorème de d'Alembert, tout polynôme P , de degré ≥ 2 , admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. P est donc divisible par $(X - \alpha)$, et il n'est pas irréductible. \square

Corollaire 4.5. (Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$). Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ de $\mathbb{C}[X]$. Sa décomposition en produit de facteurs irréductibles est de la forme :

$$P = \lambda (X - \alpha_1)^{r_1} \cdots (X - \alpha_p)^{r_p} \quad \text{avec} \quad r_1 + \dots + r_p = n,$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines distinctes de P , r_1, \dots, r_p leurs multiplicités et λ le coefficient dominant de P .

4.c. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Théorème 4.6. Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

- les polynômes de degré 1,
- les polynômes de degré 2, dont le discriminant est strictement négatif.

Démonstration. — Si P est de degré 1, il est irréductible.

— Si P est un polynôme de degré 2 avec $\Delta < 0$, il est irréductible. Sinon, il se décomposerait en produit de deux polynômes, chacun de degré 1 : $P = (aX + b)(cX + d)$. Il aurait deux racines (distinctes ou confondues), et son discriminant serait ≥ 0 . Contradiction.

— Si P est un polynôme de degré 2 avec $\Delta \geq 0$, il admet deux racines réelles (distinctes ou confondues) et s'écrit $P = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$. Il n'est pas irréductible.

— Si P est un polynôme de degré $n > 2$, d'après le théorème de d'Alembert, il admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$

Ou bien $\alpha \in \mathbb{R}$, P est divisible par $(X - \alpha)$, et il n'est pas irréductible.

Ou bien $\alpha \notin \mathbb{R}$ alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P .

$(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = (X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)$ est un polynôme à coefficients réels.

On fait la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)Q + R$ avec $\deg R \leq 1$. Or $R(\alpha) = R(\bar{\alpha}) = 0$ et $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Donc $R = 0$.

Par conséquent, P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car de degré strictement supérieur à 2 tout en étant divisible par un polynôme de degré 2. \square

Corollaire 4.7. *Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$*

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Sa décomposition en produit de facteurs irréductibles est de la forme :

$$P = \lambda (X - \alpha_1)^{r_1} \cdots (X - \alpha_p)^{r_p} (X^2 + \beta_1 X + \gamma_1)^{s_1} \cdots (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{s_k}$$

avec $r_1 + \cdots + r_p + 2(s_1 + \cdots + s_k) = n$ et $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ pour $i = 1, \dots, k$,

et les entiers naturels k et n sont non tous deux nuls.

Exemple 4.8. $X^3 + X = X(X^2 + 1) = X(X + i)(X - i)$

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est $X(X + i)(X - i)$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est $X(X^2 + 1)$.

Exercice 4.9. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 2X^3 + 14X^2 - 18X + 45$ sachant qu'il admet $1 + 2i$ comme racine.

Exercice 4.10. Décomposer en produit de facteurs irréductibles le polynôme $X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

5. Réponse à quelques exercices

Exercice 2.5.

X^4	$- 2X^2$	$- X + 1$	$X^2 + X$
$- X^4$	$- X^3$		$X^2 - X - 1$
	$- X^3$	$- 2X^2$	
	X^3	$+ X^2$	
	$- X^2$	$- X + 1$	
	X^2	$+ X$	
		1	

Le quotient de la division euclidienne de $X^4 - 2X^2 - X + 1$ par $X^2 + X$ est donc $X^2 - X - 1$, le reste est 1.

De même, on trouve que le quotient de la division euclidienne de $X^6 + 4X^4 - X^2 + 1$ par $X^2 + 1$ est $X^4 + 3X^2 - 4$, et le reste 5.

Exercice 3.3.

a. 1 est une racine de P .

b. En effectuant la division euclidienne de P par $X - 1$, on obtient $P = (X - 1)(X^2 - 3)$.

c. L'équation $x^2 = 3$ a deux solutions, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. On a donc $P(x) = 0 \iff x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$. Les trois racines de P sont 0, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Exercice 4.9. P est divisible par $(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i) = X^2 - 2X + 5$. En effectuant la division euclidienne on obtient $P = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 9)$ qui est bien le produit de deux polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ s'en déduit immédiatement :

$$P = (X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)(X - 3i)(X + 3i).$$

Exercice 4.10. Les zéros de P sur \mathbb{C} sont les racines troisièmes de l'unité : 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \bar{j} = e^{-2i\pi/3}$. La décomposition en facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{C}[X]$ est donc

$$P(X) = (X - 1)(X - j)(X - \bar{j}).$$

Pour obtenir la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$, on calcule $(X - j)(X - \bar{j})$ ou on effectue la division euclidienne de P par $(X - 1)$. On obtient

$$P(X) = (X - 1)(X^2 + X + 1).$$

6. Travaux dirigés

Exercice I.1. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Donner les degrés des polynômes suivants : $P^3 + 2P^5$, $P''P$, $P - (P'')^2$.

Exercice I.2. Effectuer la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

- a) $A = 2X^3$, $B = 2X + 1$ b) $A = X^3 + iX^2 + 3X + i$, $B = X^2 + 2iX - 1$
 c) $A = X^5 - X^4 - 2X^3 + 5$, $B = X^2 - 2$ d) $A = X^2 - 1$, $B = 2X^3 + X + 1$.

Exercice I.3. A l'aide d'une division euclidienne, déterminer pour quel(s) réel(s) a le polynôme $P = X^4 + aX^2 + 4$ est divisible par $Q = X^2 - X + 2$.

Exercice I.4.

a. Montrer en effectuant une division euclidienne que le polynôme $P = 3X^4 - 17X^3 + 23X^2 + 16X - 10$ est divisible par $X^2 - 6X + 10$.

b. Calculer les racines de $X^2 - 6X + 10$. Montrer que ce sont aussi des racines de P . En déduire une autre démonstration du résultat de la question précédente.

Exercice I.5. Soit P le polynôme $X^8 + 20X^4 + 64$.

- a. Le polynôme P a-t-il des racines réelles ?
 b. Déterminer les racines complexes de P et leur ordre de multiplicité.

Exercice I.6. Soit $P = X^4 + 6X^2 + 8iX - 3$.

- a. Montrer que $-i$ est racine de P et donner son ordre de multiplicité.
 b. Déterminer toutes les racines de P et leurs ordres de multiplicité.

Exercice I.7. Soit $P = X^4 - 4X^2 - 16X + 32$.

- a. Montrer que 2 est racine de P et donner son ordre de multiplicité.
 b. Déterminer toutes les racines réelles, puis toutes les racines complexes de P et leurs ordres de multiplicité.

Exercice I.8. Montrer que le polynôme $4X^7 + 10X^3 + 5X - 2$ a une et une seule racine réelle. On ne demande pas de calculer cette racine.

Exercice I.9. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soient a et b deux nombres complexes *distincts*. Calculer le reste de la division de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

★ *Exercice I.10.*

- a. Calculer $\cos(5a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$, puis seulement en fonction de $\cos(a)$.
 b. A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe un polynôme non nul P , à coefficients entiers, tel que

$$P\left(\cos \frac{\pi}{10}\right) = 0.$$

On dit que $\cos \frac{\pi}{10}$ est *algébrique*.

c. Soit m et n des entiers naturels avec $n \neq 0$. Justifier qu'il existe un polynôme Q , à coefficients entiers, tel que pour tout réel a , $\cos(na) = Q(\cos a)$. En déduire que $\cos \frac{m\pi}{n}$ est algébrique, c'est à dire qu'il existe un polynôme P non nul, à coefficients entiers, tel que

$$P\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) = 0.$$

Pour d'autres exercices sur les polynômes, on pourra consulter la feuille de TD 2 de 2014 :

https://www.math.univ-paris13.fr/~duyckaer/enseignement/L1_2014_TD2.pdf

7. Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice I.11. Déterminer toutes les racines du polynôme $2X^4 + 9X^3 + 9X^2 - X - 3$ avec leurs ordres de multiplicité. On pourra commencer par chercher une racine évidente.

Exercice I.12. Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^3 + (1 + 2i)X^2$ par $X + 1$ (ou toute autre division euclidienne de polynômes).

Exercice I.13.

- a. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$
 b. Rappeler la valeur de $\cos(\pi/3)$. En utilisant la question précédente, trouver un polynôme P , à coefficients entiers, tel que $P\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 0$.

Exercice I.14. Soit P le polynôme

$$P = X^4 - 2iX^3 - 3X^2 + 4iX + 2.$$

- a. Montrer que i est une racine de P . Déterminer son ordre de multiplicité.
 b. Déterminer toutes les racines complexes de P avec leurs ordres de multiplicité.

II. Systèmes linéaires

La référence principale pour ce chapitre est le livre de David C. Lay¹.

Dans tout ce chapitre, on note \mathbb{K} un corps (la notion de corps a été vue au premier semestre dans le cours d'algèbre 1). Le choix du corps est indifférent pour tous les résultats du chapitre. Dans les exemples, on prendra toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On appellera *nombre* ou *scalaire* un élément de \mathbb{K} .

1. Définitions et premiers exemples

1.a. Définitions

Définition 1.1. Soit $n \geq 1$. On appelle *équation linéaire* à n inconnues x_1, \dots, x_n une équation de la forme

$$(E) \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j = b,$$

où a_1, a_2, \dots, a_n et b sont fixés dans \mathbb{K} . Les scalaires a_1, a_2, \dots, a_n sont appelés *coefficients* de l'équation, b est le *second membre*. Lorsque $b = 0$, on dit que l'équation est *homogène*.

Remarque 1.2. La notation $\sum_{j=1}^n a_j x_j$ dans (E) signifie $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$. Il est impératif de maîtriser ce type de notation.

Définition 1.3. L'*ensemble des solutions* de (E) est l'ensemble des (x_1, x_2, \dots, x_n) de \mathbb{K}^n tels que $\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$. C'est donc un sous-ensemble de \mathbb{K}^n .

Exemple 1.4.

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$$

est une équation linéaire non-homogène à 3 inconnues.

$$-ix_1 + (2+i)x_2 - 4x_3 = 0$$

est une équation linéaire (complexe) homogène à 3 inconnues.

$$2x_1^2 + x_2 x_3 - 4x_3^3 = 1$$

n'est pas une équation linéaire.

Définition 1.5. Si $p \geq 1$, on appelle *système linéaire* à p équations et n inconnues un ensemble de p équations linéaires ayant les mêmes n inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Les scalaires a_{ij} , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$ sont encore appelés les *coefficients* du système. Il est d'usage d'utiliser le premier indice pour numéroter les lignes et le deuxième indice pour numéroter les colonnes. Le p -uplet $b = (b_1, \dots, b_p)$ est appelé *second membre* du système. Lorsque tous les b_j sont nuls (on dit encore que b est nul), on dit que le système est *homogène*.

L'*ensemble des solutions* de (S) est le sous-ensemble de \mathbb{K}^n formé des (x_1, \dots, x_n) qui vérifient *toutes* les équations de (S). On cherche à résoudre le système (S), c'est à dire décrire précisément cet ensemble.

Définition 1.6. Le système (S) est dit *compatible* si il a au moins une solution.

Remarque 1.7. Un système homogène est toujours compatible : $(0, 0, \dots, 0)$ est solution.

Remarque 1.8. On peut réécrire le système (S) sous forme abrégée :

$$\forall i = 1 \dots p, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i.$$

Remarque 1.9. Lorsque le nombre d'inconnues n est petit, on note souvent x, y, z, t (au lieu de x_1, x_2, \dots) ces inconnues pour alléger les notations.

Donnons quelques exemples simples.

Exemples 1.10.

$$\begin{cases} 17(x + 2y) = \sqrt{7}z + 3 \\ \frac{x + z}{2} = 12. \end{cases}$$

est un système linéaire non-homogène, à 2 équations et 3 inconnues, que l'on peut écrire sous la forme (S) (avec $x = x_1, y = x_2, z = x_3$) :

$$\begin{cases} 17x + 34y - \sqrt{7}z = 3 \\ \frac{1}{2}x + 0y + \frac{1}{2}z = 12. \end{cases}$$

1. David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications*. Troisième édition, 2004

II. Systèmes linéaires

Ici $a_{11} = 17$, $a_{12} = 34$, $a_{13} = -\sqrt{7}$, $a_{21} = \frac{1}{2}$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = \frac{1}{2}$, $b_1 = 3$ et $b_2 = 12$.
Le système :

$$\begin{cases} xyz + 7 = 0 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

n'est pas linéaire (la première équation ne peut pas être mise sous la forme d'une équation linéaire). L'équation :

$$(II.1) \quad (x + y - 3)^2 + (2x + y + 2)^2 = 0$$

n'est pas linéaire. Toutefois, si l'on cherche à résoudre cette équation sur \mathbb{R} , elle est équivalente au système linéaire :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = -2. \end{cases}$$

Remarquons que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'équation (II.1) ne peut pas être ramenée à un système linéaire.

Exercice 1.11. Mettre les systèmes linéaires suivants sous la forme (S). Déterminer p , n , et les paramètres a_{ij} et b_i .

$$(II.2) \quad \begin{cases} 3x + y = 4z + 3 \\ y = z, \end{cases}$$

$$(II.3) \quad x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0.$$

Les systèmes linéaires apparaissent dans tous les domaines d'applications des mathématiques (économie, industrie...). Dans les applications, p et n sont souvent très grands, et on ne peut pas résoudre le système "à la main". Il existe évidemment de nombreux logiciels informatiques qui en sont capables. Les buts de ce chapitre sont :

- savoir résoudre "à la main" un système lorsque p et n sont petits ;
- apprendre un algorithme général de résolution des systèmes linéaires, la méthode du pivot de Gauss ;
- en déduire quelques propriétés de la structure de l'ensemble des solutions. Cette structure sera précisée au Chapitre V, à travers la notion d'espace vectoriel.

On commence par considérer des exemples de résolution de systèmes linéaires à deux équations et deux inconnues. On introduit ensuite une notation commode (la notation matricielle) avant de dégager une méthode générale. Le cas des systèmes à une seule inconnue, ou à une seule équation et un faible nombre d'inconnues est traité en travaux dirigés (cf Exercices II.1 et II.2, p. 23).

1.b. Quelques exemples simples

On s'intéresse aux systèmes de la forme :

$$(II.4) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(a_{11}, a_{12}) \neq (0, 0)$ et $(a_{21}, a_{22}) \neq (0, 0)$, (II.4) décrit l'ensemble des points d'intersection de deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 du plan \mathbb{R}^2 . On a donc trois cas :

- Les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas parallèles : elles ont un unique point d'intersection, et (II.4) n'a qu'une seule solution.
- Les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles. Le système (II.4) n'a pas de solution, sauf si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont confondues, auquel cas le système a une infinité de solutions (l'ensemble des coordonnées des points de la droite $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$).

On donne maintenant trois exemples que l'on va résoudre algébriquement, sans utiliser d'argument géométrique.

Exemple 1.12.

$$(II.5) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 8 & (L_1) \\ 2x + 5y = 9 & (L_2). \end{cases}$$

Éliminons l'inconnue "x" de la deuxième ligne à l'aide de la première ligne :

$$(II.6) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 0 + \left(5 - \frac{4}{3}\right)y = \left(9 - \frac{16}{3}\right) & (L_2) - \frac{2}{3}(L_1). \end{cases}$$

La notation $(L_2) - \frac{2}{3}(L_1)$ à la deuxième ligne (on écrira parfois $(L_2) \leftarrow (L_2) - \frac{2}{3}(L_1)$) signifie que l'on a remplacé la deuxième ligne par la différence de la deuxième ligne et du produit de $\frac{2}{3}$ par la première ligne.

$$(II.7) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ y = 1 & \frac{3}{11}(L_2). \end{cases}$$

Une fois connue la valeur de y il suffit de la substituer dans (L_1) pour obtenir la valeur de x : on obtient $3x = 8 - 2 = 6$, i.e. $x = 2$. Le système (II.5) a donc pour unique solution $(2, 1)$ (en d'autres termes, l'ensemble des solutions est le singleton $\{(2, 1)\}$).

On peut aussi conclure, à partir de (II.7), en utilisant des opérations sur les lignes :

$$(II.8) \quad \begin{cases} 3x = 6 & (L_1) - 2(L_2) \\ y = 1 & \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x = 2 & \frac{1}{3}(L_1) \\ y = 1 & \end{cases}$$

Exemple 1.13.

$$(II.9) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 6x + 4y = 20. \end{cases}$$

On élimine x comme dans l'exemple 1.12

$$(II.10) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 0 = 4 \end{cases} \quad (L_2) - 2(L_1).$$

Il n'y a pas de solution.

Exemple 1.14.

$$(II.11) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 6x + 4y = 16. \end{cases}$$

On utilise la même stratégie :

$$(II.12) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (L_2) - 2(L_1).$$

La deuxième équation est toujours vraie. Le système (II.11) est donc équivalent à l'équation, $3x + 2y = 8$. Il y a toute une droite de solutions, l'ensemble

$$\left\{ \left(x, 4 - \frac{3}{2}x \right), x \in \mathbb{K} \right\}.$$

On dit qu'on a donné une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

Remarque 1.15. Dans les exemples précédents, l'ensemble des solutions est ou bien vide, ou bien réduit à un seul élément, ou bien infini. Nous verrons plus tard (théorème 2.22 p. 19) que cette propriété persiste dans le cas d'un système linéaire général.

On renvoie à l'exercice de travaux dirigés II.12 pour un système général à deux équations, deux inconnues.

1.c. Notation matricielle

Une *matrice* $p \times n$ est un tableau de nombre à p lignes et n colonnes. Nous étudierons les matrices de manière plus systématique dans le chapitre III de ce cours.

Lors des manipulations sur les lignes des exemples précédents, on peut gagner du temps en décidant de ne pas noter les variables :

Définition 1.16. On appelle *matrice des coefficients* du système (S) la matrice $p \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

et *matrice augmentée* la matrice $p \times (n + 1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & b_p \end{array} \right]$$

(le trait vertical, facultatif, permet de séparer les coefficients du système du second membre).

On peut reprendre les opérations précédentes en notation matricielle. Par exemple, les manipulations sur les lignes de l'exemple 1.12 s'écrivent :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 9 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 5 - \frac{4}{3} & 9 - \frac{16}{3} \end{array} \right] \quad (L_2) - \frac{2}{3}(L_1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{3}{11}(L_2)} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad (L_1) - 2(L_2) \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}(L_1)}$$

ce qui signifie bien $x = 2, y = 1$ (cf (II.8)).

Exercice 1.17. Résoudre le système

$$(II.13) \quad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

en utilisant la notation matricielle.

2. Méthode du pivot

On formalise et généralise maintenant la méthode esquissée dans les exemples précédents pour résoudre des systèmes linéaires quelconques. Plus précisément :

- on introduit en 2.a une famille de systèmes pour lesquels il est très facile de décrire l'ensemble des solutions, les systèmes *sous forme échelonnée réduite* ;
- on définit en 2.b des opérations sur les lignes des systèmes linéaires qui ne changent pas l'ensemble des solutions : les *opérations élémentaires*. Ce sont exactement les opérations apparaissant dans les exemples précédents ;

- on montre en 2.c comment ramener, par une série d'opérations élémentaires, tout système linéaire, à un système sous forme échelonnée réduite : c'est la méthode du pivot proprement dite.

Cette partie se termine par l'étude d'une classe de système importante, les systèmes de Cramer (2.d).

2.a. Forme échelonnée

On définit ici un ensemble de matrice correspondant à des systèmes dont on peut décrire l'ensemble des solutions sans aucun calcul supplémentaire. Le but de la méthode du pivot sera de se ramener à ce type de matrice.

Définitions

Définition 2.1. Soit A une matrice $p \times n$. Une *ligne nulle* de A est une ligne de A formée uniquement de zéros. On appelle *élément de tête* d'une ligne non nulle de A l'élément non nul le plus à gauche de cette ligne. On dit que A est *sous forme échelonnée* (ou simplement *échelonnée*) lorsque les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- Toutes les lignes non nulles sont situées au-dessus des lignes nulles.
- L'élément de tête de chaque ligne non nulle se trouve dans une colonne (strictement) à droite de l'élément de tête de la ligne précédente.

Remarque 2.2. Le point ii implique que tous les éléments de la matrice situés sous un élément de tête sont nuls.

On dit que A est *sous forme échelonnée réduite* (ou simplement que A est *échelonnée réduite*) quand de plus les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- L'élément de tête de chaque ligne non nulle vaut 1.
- L'élément de tête de chaque ligne non nulle est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Définition 2.3. On dit qu'un système linéaire est *sous forme échelonnée* (respectivement *échelonnée réduite*) quand sa matrice augmentée est sous forme échelonnée (respectivement échelonnée réduite).

Exercice 2.4. Écrire un algorithme, ou une fonction en langage C qui détermine si une matrice est échelonnée (respectivement échelonnée réduite).

Exemples 2.5. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ n'est pas échelonnée (i n'est pas vérifiée).

La matrice $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas échelonnée (cette fois, ii est faux).

La matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est échelonnée, mais pas échelonnée réduite (iii et iv sont faux).

La matrice $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est échelonnée, mais pas échelonnée réduite (iii est faux).

La matrice $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est échelonnée réduite.

Le système $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$ est sous forme échelonnée réduite.

Exemples 2.6. Le premier système de (II.8) est sous forme échelonnée non réduite, le dernier système de (II.8) est sous forme échelonnée réduite.

Le système (II.10) est sous forme échelonnée non réduite.

Le système (II.12) est sous forme échelonnée non réduite. Après multiplication de la première ligne par $\frac{1}{3}$, on obtient la forme échelonnée réduite équivalente :

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = \frac{8}{3} \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Dans ce système la deuxième ligne $0 = 0$ est bien sûr superflue.

On renvoie à l'exercice 5 des travaux dirigés p. 23 pour d'autres exemples.

Exercice 2.7. Déterminer si les systèmes suivants sont sous forme échelonnée (respectivement sous forme échelonnée réduite) :

- Un système à une seule équation.

ii.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}, \text{ puis } \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

iii.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1+2i & 5 & 4i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

iv.

$$(S_1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ e^{i\pi/3}y + 2z = -1 \\ z = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \\ x - z = -4 \end{cases}$$

(cf correction p. 21).

Application aux systèmes linéaires

On rappelle qu'un système linéaire est dit *compatible* quand il a au moins une solution. On peut décrire facilement l'ensemble des solutions d'un système linéaire (S) dont la matrice augmentée A est sous forme échelonnée réduite. On rappelle que si (S) est un système à p équations et n inconnues, la matrice A est une matrice $p \times (n+1)$ (i.e. un tableau de nombres avec p lignes et $n+1$ colonnes). Soit donc A une matrice $p \times (n+1)$ échelonnée (éventuellement non réduite pour commencer).

On distingue deux cas.

— *Premier cas.* Si la colonne la plus à droite (la $n+1$ -ième colonne) de A contient un élément de tête cela se traduit par une équation $0 = c$, avec $c \neq 0$, tautologiquement fausse, ce qui montre que le système n'a pas de solution. Le système (S) est n'est pas compatible.

Supposons par exemple que le système a pour matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{array} \right]$$

Cette matrice est sous forme échelonnée (non réduite). Le 2 en bas à droite est un élément de tête situé sur la dernière colonne : le système n'a pas de solution, car la dernière ligne se lit $0 = 2$.

— *Deuxième cas.* Supposons que la colonne de droite de A ne contient aucun élément de tête. Montrons que dans ce cas, le système est compatible. Notons q le nombre de lignes non nulles qui est inférieur ou égal au nombre de ligne total p . L'élément de tête de chacune de ces lignes, situé sur une des n premières colonnes, correspond à une des inconnues x_1, \dots, x_n . On appelle *variables de base*, ou parfois *inconnues principales* ces inconnues (qui sont au nombre de q , ce qui montre que $q \leq n$), et *variables libres* (ou parfois *inconnues secondaires* ou encore *paramètres*) les autres inconnues, qui sont au nombre de $n - q$.

Notons $(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_q})$, $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_q \leq n$ les q variables de base. Pour $1 \leq i \leq q$, la i -ième ligne donne une expression de x_{α_i} en fonctions des variables $(x_k)_{k > \alpha_i}$. On peut ainsi exprimer chacune des variables de base en fonctions des variables libres par récurrence, en utilisant successivement la q -ième ligne (qui permet d'écrire x_{α_q} en fonctions des variables libres $(x_k)_{k > \alpha_q}$), puis la $q-1$ -ième ligne (qui permet d'écrire $x_{\alpha_{q-1}}$ en fonctions des variables $(x_k)_{k > \alpha_{q-1}}$, qui sont toutes des variables libres, sauf x_{α_q} que l'on sait déjà écrire avec les variables libres), etc...

Lorsque le système est sous forme échelonnée réduite, cette description est particulièrement simple : pour tout i entre 1 et q , la i -ième ligne donne sans aucun calcul supplémentaire une expression de x_{α_i} en fonctions des variables libres.

On a écrit toutes les variables de base en fonction des paramètres. En faisant varier les paramètres dans \mathbb{K} , on obtient exactement l'ensemble des solutions

du système. On dit que l'on a obtenu une *description paramétrique* de l'ensemble des solutions. Récapitulons :

Proposition 2.8. *Un système compatible sous forme échelonnée avec n inconnues et q équations non nulles se décrit avec $n - q$ paramètres. En d'autres termes, si le système est sous forme échelonnée, on a :*

$$\text{nbre d'inconnues} - \text{nbre d'équations} = \text{nbre de degrés de liberté}.$$

Nous donnerons plus tard, dans le chapitre sur les applications linéaires une interprétation plus abstraite de cette proposition, appelée *théorème du rang*.

Remarque 2.9. Il y a plusieurs façons de résoudre un système linéaire, et donc plusieurs choix des variables de base et des variables libres. Par exemple l'ensemble des solutions de l'équation $x + y = 2$ peut s'écrire en choisissant y comme variable de base et x comme variable libre :

$$\{(x, 2 - x), x \in \mathbb{R}\},$$

ou au contraire x comme variable de base et y comme variable libre :

$$\{(2 - y, y), y \in \mathbb{R}\}.$$

On peut montrer en revanche que pour un système linéaire donné, le nombre de variables de base et le nombre de variables libres est indépendant du choix de ces variables. Nous omettons pour l'instant la démonstration de cette propriété, qui se fait plus naturellement dans le cadre de la théorie des espaces vectoriels et des applications linéaires (c'est une interprétation du théorème du rang mentionné plus haut, et qui sera vu dans le chapitre sur les applications linéaires, au tome II).

Donnons deux exemples.

Supposons d'abord que la matrice augmentée du système (S) est

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{array} \right]$$

C'est une matrice de forme échelonnée réduite, dont les éléments de tête sont les "1" en gras. La colonne de droite ne contient aucun élément de tête : le système est compatible. Les variables de base (correspondant aux numéros des colonnes des éléments de tête) sont x_1, x_2 et x_4 . Le seul paramètre est x_3 . On obtient la description paramétrique suivante de l'ensemble des solutions :

$$x_1 = 4 - 3x_3, x_2 = 3 - 2x_3, x_4 = 5, x_3 \in \mathbb{K}.$$

En d'autres termes, l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{(4 - 3x_3, 3 - 2x_3, x_3, 5), x_3 \in \mathbb{K}\}.$$

Supposons que le système a pour matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Cette matrice est sous forme échelonnée réduite, et le système est compatible. Les variables de base sont x_1 et x_3 , et les variables libres x_2 et x_4 . L'ensemble des solutions est

$$\left\{ (4 - 2x_2 + x_4, x_2, -5 - 2x_4, x_4), (x_2, x_4) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

On peut maintenant donner une définition plus précise de la résolution d'un système linéaire : résoudre le système (S), c'est donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

Exercice 2.10. Dire si les systèmes de l'exercice 2.7, lorsqu'ils sont sous forme échelonnée réduite, sont compatibles. Donner alors une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

(cf correction p. 22).

Exercice 2.11. Dire si chacune des matrices suivantes est sous forme échelonnée (respectivement sous forme échelonnée réduite). Le système dont c'est la matrice augmentée est-il compatible ? Si c'est le cas, donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$

b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right],$ c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

(cf correction p. 22).

Dans la suite, on explique comment se ramener à un système sous forme échelonnée réduite.

2.b. Systèmes équivalents. Opérations élémentaires

Définition 2.12. Deux systèmes linéaires ayant le même nombre d'inconnues sont *équivalents* lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple 2.13. Les systèmes suivants sont équivalents :

$$(II.14) \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

En effet, l'ensemble des solutions de ces deux systèmes est $\{(1, -1)\}$. Les deux systèmes suivants ne sont pas équivalents :

$$(II.15) \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

En effet, l'ensemble des solutions du premier système est $\{(1, -1)\}$, l'ensemble des solutions du deuxième système est $\{(-1, 1)\}$.

Définition 2.14. On appelle *opération élémentaire* sur un système (ou sur les lignes d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes :

- i. L'échange de deux lignes (L_i) et (L_j), noté $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$.
- ii. La multiplication d'une ligne par un scalaire $k \in \mathbb{K}$ non nul, appelée *cadrage*, notée $(L_i) \leftarrow k(L_i)$.
- iii. L'ajout à une ligne du multiple d'une autre ligne par un scalaire k , appelé *remplacement*, noté $(L_i) \leftarrow (L_i) + k(L_j)$.

Le lecteur est invité à vérifier que toutes les opérations réalisées dans les exemples de la partie 1 sont des opérations élémentaires au sens de la définition 2.14. Par exemple, l'opération conduisant à (II.6) est un remplacement, celle conduisant à (II.7) un cadrage.

Remarque 2.15. Il revient bien sûr au même de faire des opérations élémentaires sur un système d'équations linéaires, ou sur les lignes de la matrice augmentée de ce système.

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions :

Proposition 2.16. Soient (S) et (S') deux systèmes linéaires ayant le même nombre d'inconnues et d'équations. On suppose que (S') peut être obtenu à partir de (S) par une série d'opérations élémentaires. Alors (S) et (S') sont équivalents.

Démonstration. Par une récurrence simple, il suffit de montrer qu'une seule opération élémentaire ne change pas l'ensemble des solutions.

C'est évident si cette opération élémentaire est l'échange de deux lignes.

Si k est fixé, non nul, on peut diviser les deux membres d'une égalité par k . On a donc :

$$k(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = k b_i \iff a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i,$$

ce qui montre que le cadrage (multiplication d'une ligne par un scalaire non nul) ne change pas l'ensemble des solutions.

Il reste à traiter le cas du remplacement, i.e. l'opération $(L_j) \leftarrow (L_j) + k(L_i)$, où $i \neq j$, $k \in \mathbb{K}$. En ignorant les lignes autres que la i -ième et la j -ième, qui ne changent pas, on est amené à montrer que les deux systèmes

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i & (L_i) \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j & (L_j) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i & (L_i) \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + k(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = b_j + kb_i & (L'_j) \end{cases}$$

sont équivalents, c'est à dire que $x = (x_1, \dots, x_n)$ vérifie (L_i) et (L_j) si et seulement si il vérifie (L_i) et (L'_j) .

On suppose d'abord que x vérifie (L_i) et (L_j) . Alors

$$\underbrace{a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n}_{=b_j \text{ par } (L_j)} + k \underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)}_{=b_i \text{ par } (L_i)} = b_j + kb_i,$$

ce qui montre (L'_j) .

Supposons réciproquement que x vérifie (L_i) et (L'_j) . Alors

$$\begin{aligned} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \\ = \underbrace{a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + k(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)}_{=b_j + kb_i \text{ par } (L'_j)} \\ - k \underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)}_{=b_i \text{ par } (L_i)} = b_j, \end{aligned}$$

d'où (L_j) . □

Avertissement 2.17. Pour passer d'un système linéaire à un système équivalent, il est très fortement conseillé de s'en tenir à des opérations élémentaires au sens de la définition (2.14). Des opérations sur les lignes mal choisies peuvent changer l'ensemble des solutions. Une erreur typique est de réaliser *simultanément* deux remplacements de la forme $(L_i) \leftarrow (L_i) + k(L_j)$ et $(L_j) \leftarrow (L_j) + k'(L_i)$. Par exemple :

$$(II.16) \quad \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ donne : } \begin{cases} 3x = 2 & (L_1) + 2(L_2) \\ \frac{3}{2}x = 1 & (L_2) + \frac{1}{2}(L_1). \end{cases}$$

Les deux systèmes ci-dessus ne sont pas équivalents : le premier a pour unique solution $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, le deuxième a une infinité de solutions : $\{(\frac{2}{3}, y), y \in \mathbb{K}\}$. Remarquons que les deux opérations simultanées $(L_2) \leftarrow (L_2) + \frac{1}{2}(L_1)$ et $(L_1) \leftarrow (L_1) + 2(L_2)$ ne peuvent pas s'écrire comme deux remplacements successifs. Les lecteurs et lectrices sont invités à méditer cet exemple : pratiquement toutes les erreurs dans les résolutions de systèmes, en dehors des fautes de calcul, sont de cette forme là.

2.c. Méthode du pivot de Gauss

Nous venons de voir qu'un système linéaire sous forme échelonnée réduite peut être résolu très facilement. Nous allons maintenant montrer :

Théorème 2.18. *Soit (S) un système linéaire. Alors (S) peut être transformé, par des opérations élémentaires sur les lignes, en un système sous forme échelonnée réduite.*

Il est en fait plus commode de travailler en notation matricielle, et de prouver le théorème équivalent :

Théorème 2.19. *Soit A une matrice. Alors A peut être transformée, par des opérations élémentaires sur les lignes, en une matrice échelonnée réduite.*

Notons que le théorème 2.19, appliqué à la matrice augmentée du système (S) , implique le théorème 2.18.

Pour montrer le théorème 2.19, on utilise une méthode appelée *méthode du pivot* ou *du pivot de Gauss*, qui suit exactement la stratégie ébauchée en 1 pour la résolution des systèmes à deux équations, deux inconnues. Le nom de cette méthode est un hommage au mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mais elle était déjà connue des mathématiciens chinois du 1er siècle de notre ère. D'après Wikipedia "Elle est référencée dans l'important livre chinois *Jiuzhang suanshu* ou *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*, dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre *Fang cheng* (la disposition rectangulaire)".

La méthode du pivot permet de démontrer les théorèmes 2.18 et 2.19, mais elle donne aussi et surtout une méthode générale de résolution des systèmes linéaires. Elle doit donc être parfaitement comprise.

Soit A une matrice (p, N) (p lignes, N colonnes). Dans l'application aux systèmes linéaires, p est le nombre d'équations, et $N = n + 1$ où n est le nombre d'inconnues. Pour montrer le théorème 2.19, on veut transformer A en une matrice échelonnée réduite par une série d'opérations élémentaires sur les lignes. La méthode est divisée en une phase de descente (permettant d'obtenir une matrice échelonnée qui n'est pas forcément réduite) et une phase de remontée. Pour illustrer cette méthode, on l'applique à la matrice

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right].$$

L'utilisation de la notation matricielle n'est pas obligatoire : on peut aussi résoudre un système en réalisant les opérations décrite plus bas directement sur ce système plutôt que sur sa matrice augmentée.

Phase de descente

Cette phase permet de transformer une matrice quelconque en une matrice échelonnée. Elle est divisée en 4 étapes, que l'on doit éventuellement réaliser plusieurs fois.

Étape 1 : choix du pivot. On appelle *colonne pivot* la première colonne non nulle². On choisit sur cette colonne un élément non nul, appelé pivot. Dans notre exemple,

2. c'est à dire la colonne la plus à gauche qui n'est pas composée uniquement de zéros

II. Systèmes linéaires

la colonne pivot est la première colonne. On peut choisir comme élément pivot le 1 en haut à gauche (en gras).

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right].$$

Etape 2. On échange la première ligne avec la ligne de l'élément pivot. Le pivot devient ainsi l'élément de tête de la première ligne. Dans notre exemple, l'élément pivot est déjà situé sur la première ligne : cette étape ne modifie pas la matrice.

Etape 3. En ajoutant aux autres lignes un multiple adéquat de la première ligne, on annule tous les coefficients de la colonne pivot autre que le pivot. Dans notre exemple, cela donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ (L_2) - 2(L_1) \\ (L_3) - (L_1) \end{array}.$$

Etape 4. Si la matrice obtenue est sous forme échelonnée, la phase de descente est terminée. Sinon, on applique les étapes 1 à 4 à la matrice à laquelle on a enlevé la première ligne.

Revenons à notre exemple. La matrice A a 3 lignes. On applique les étapes 1 à 4 à la matrice $A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array} \right]$ obtenue à partir de A en enlevant la première ligne. En pratique, on continue à écrire cette première ligne, que l'on ignore.

Étape 1' : On considère donc la matrice $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{array} \right]$. La colonne pivot

(première colonne non nulle lorsqu'on ignore la première ligne) est la deuxième colonne. On doit choisir comme pivot le -2 , situé à la troisième ligne de cette colonne.

Étape 2' : on échange la 2ème et la 3ème ligne, la matrice obtenue est

$$(II.17) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Étape 3' : les coefficients de la colonne pivot (la deuxième colonne) autre que le pivot sont déjà nuls, il n'y a donc rien à faire. Rappelons que l'on ignore la première ligne. Il n'y a donc que le coefficient situé à la troisième ligne de cette deuxième colonne à considérer. Ce coefficient est bien égal à zéro.

Étape 4' : la matrice obtenue est échelonnée : on arrête ici la phase de descente.3.

Si A est une matrice échelonnée $p \times N$, et (a_0, \dots, a_N) sont $N + 1$ scalaires tels que $a_0 \neq 0$, la matrice

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_0 & a_1 & \dots & a_N & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right],$$

(ou tout autre matrice obtenue à partir de B en rajoutant des colonnes de zéros à sa gauche) est une matrice échelonnée. De cette remarque, et du fait que toute matrice ayant une seule ligne est échelonnée, on déduit que la phase de descente de la méthode du pivot aboutit bien, après un certain nombre³ de passages par les étapes 1 à 4, à une matrice échelonnée.

Pour obtenir une matrice échelonnée réduite, on a besoin de deux étapes supplémentaires, qui constituent la phase de remontée.

Phase de remontée

Etape 5 : cadrage. On multiplie chaque ligne non nulle par l'inverse de son élément de tête, de telle manière que l'élément de tête de la nouvelle ligne vaut 1. Dans notre exemple :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] -\frac{1}{2}(L_2)$$

Etape 6 : on ajoute à chaque ligne un multiple de la dernière ligne non nulle, pour que la colonne au-dessus de l'élément de tête de la dernière ligne ne soit composée que de zéros. On répète cette opération avec l'avant-dernière ligne, etc, jusqu'à la deuxième ligne. Sur notre exemple :

$$(II.18) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] (L_1) - 2(L_2)$$

Par construction, la matrice obtenue à l'issue de la phase de remontée est bien une matrice échelonnée réduite : on a transformé en 1 tous les éléments de tête, et en 0 tous les coefficients situés au dessus d'un élément de tête.

Ceci termine la démonstration du théorème 2.19 (et son analogue sur les systèmes, le théorème 2.18) et la description de la méthode du pivot.

Mentionnons que l'on peut en fait démontrer l'unicité de la forme échelonnée réduite :

au plus $p - 1$

Théorème 2.20. Soit A et B deux matrices échelonnées réduites. Supposons que B puisse être obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes. Alors $A = B$.

On omet la démonstration, cf par exemple David C. Lay⁴, annexe A.

Remarque 2.21. On déduit de l'exemple donné une description paramétrique de l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 2x + 4y + 8z = 14 \\ x - 2z = 3 \end{cases}$$

dont la matrice augmentée est la matrice A . Le système est compatible : il n'y a pas d'élément de tête sur la dernière colonne de la matrice échelonnée réduite obtenue en (II.18). Il y a deux variables de base, x et y , et une variable libre z . L'ensemble des solutions est donné par

$$\{(3 + 2z, 2 - 3z, z), z \in \mathbb{K}\}.$$

Remarquons que la compatibilité du système pouvait se vérifier à la fin de la phase de descente, sur la forme échelonnée non réduite (II.17). La phase de descente permet, lorsque le système est compatible, de décrire plus simplement l'ensemble des solutions.

En combinant la méthode du pivot de Gauss avec la description de l'ensemble des solutions d'un système sous forme échelonnée réduite (cf la proposition 2.8), on obtient la propriété suivante, qui généralise la remarque 1.15 à tous les systèmes linéaires :

Théorème 2.22. L'ensemble des solutions d'un système linéaire est vide, ou réduit à un seul élément, ou infini.

Plus précisément, si (S) est un système compatible et (H) est le système homogène correspondant, l'ensemble des solutions de (S) s'écrit

$$\{(x_1^* + y_1, x_2^* + y_2, \dots, x_n^* + y_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ solution de } (H)\},$$

où (x_1^*, \dots, x_n^*) est une solution particulière de (S). Le nombre de variables libres apparaissant dans la description paramétrique de l'ensemble des solutions (S) est donc exactement le même que celui apparaissant dans la description paramétrique des solutions de (H). Il ne dépend pas du second membre du système.

Exercice 2.23. Combien de paramètres faut-il pour décrire chacun des systèmes suivants ?

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + (1 + i)y + z = 2 \\ x + y = 1 \\ iy + z = 1 \end{cases}$$

(cf correction p. 22).

Remarque 2.24. Il y a plusieurs variantes (parfaitement équivalentes) de la méthode du pivot que nous venons de décrire. On peut par exemple échanger les étapes 5 et 6. On peut aussi réaliser l'étape de cadrage 5 pendant la phase de descente. Dans tous les cas il est important de n'utiliser que des opérations élémentaires sur les lignes (cf l'avertissement 2.17). Ceci est particulièrement important lorsque l'on cherche à résoudre des systèmes avec paramètres (cf §3 p. 21).

Récapitulons la méthode générale de résolution d'un système linéaire décrite dans ce chapitre :

- Appliquer la phase de descente de la méthode du pivot de Gauss à la matrice augmentée du système. On obtient une matrice échelonnée.
- Déterminer si le système est compatible : si la colonne de droite contient un élément de tête, le système n'est pas compatible (i.e. il n'y a pas de solution). Sinon il est compatible.
- Si le système est compatible, appliquer la phase de remontée du pivot de Gauss. On obtient une matrice échelonnée réduite. On peut alors donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions à l'aide de cette matrice échelonnée réduite.

Donnons un autre exemple, cette fois avec des coefficients complexes. On considère le système :

$$(S) \begin{cases} 4z_1 - (3 + i)z_2 - (9 + 3i)z_3 = 5 - 3i \\ 2z_1 - 2z_2 - 6z_3 = 2 - 2i \\ 4z_1 - (2 + 2i)z_2 - (6 + 6i)z_3 = 6 - 2i \end{cases}$$

Appliquons la méthode du pivot à sa matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 - i & -9 - 3i & 5 - 3i \\ \mathbf{2} & -2 & -6 & 2 - 2i \\ 4 & -2 - 2i & -6 - 6i & 6 - 2i \end{array} \right]$$

Phase de descente

Etape 1 : choix du pivot. La colonne pivot est la première colonne. Le pivot est le 2 en gras.

Etape 2 : on place la ligne du pivot en première ligne (opération $(L_1) \leftrightarrow (L_2)$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & -2 & -6 & 2 - 2i \\ 4 & -3 - i & -9 - 3i & 5 - 3i \\ 4 & -2 - 2i & -6 - 6i & 6 - 2i \end{array} \right]$$

Etape 3 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -6 & 2 - 2i \\ 0 & 1 - i & 3 - 3i & 1 + i \\ 0 & 2 - 2i & 6 - 6i & 2 + 2i \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ (L_2) - 2(L_1) \\ (L_3) - 2(L_1) \end{array}$$

4. David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications*. Troisième édition, 2004

Etape 4 : on repasse à l'étape 1 en ignorant la première ligne.

Etape 1' : la colonne pivot est la deuxième colonne. On choisit le $1 - i$ sur la deuxième ligne de cette colonne comme élément pivot.

Etape 2' : la ligne pivot est la deuxième ligne donc la "première" si on ignore la première ligne. Il n'y a rien à faire.

Etape 3' :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -6 & 2-2i \\ 0 & 1-i & 3-3i & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (L_3)-2(L_2)$$

Etape 4' : la matrice obtenue est échelonnée. La phase de descente est terminée. On remarque que la colonne de droite ne contient aucun élément de tête : le système est compatible. On passe à la phase de remontée pour obtenir une matrice échelonnée réduite.

Phase de remontée

Etape 5 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1-i \\ 0 & 1 & 3 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}(L_1) \\ \frac{1}{1-i}(L_2) \end{array}$$

Etape 6 : on utilise la ligne (L_2) pour annuler l'élément de la deuxième colonne au-dessus de l'élément de tête :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (L_1)+(L_2)$$

La matrice obtenue est sous forme échelonnée réduite. Il y a une variable libre, z_3 , et deux variables de base, z_1 et z_2 . Une description paramétrique de l'ensemble des solutions est donnée par :

$$\{(1, i - 3z, z), z \in \mathbb{C}\}.$$

Exercice 2.25. Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4z = -12 \\ -x + y + 3z = 9 \\ x - y + z = 3. \end{cases}$$

2.d. Système de Cramer

Les coefficients (a_{ij}) d'un système linéaire (S) étant fixés, la compatibilité de (S) dépend en général de son second membre (b_i). On présente ici un cas particulier important, appelé *système de Cramer* pour lequel le système est compatible quelques soient les b_i .

Proposition 2.26. Soit (S) un système linéaire de n équations à n inconnues. Supposons que (S) a une et une seule solution. Alors tout système obtenu à partir de (S) en changeant seulement le second membre a une seule solution.

Preuve de la proposition 2.26. Par des opérations élémentaires sur les lignes, on peut, d'après la méthode du pivot de Gauss, se ramener à un système sous forme échelonnée réduite (S') ayant le même ensemble de solutions que (S). Soit q le nombre de lignes non nulles de ce système. Le système étant compatible, le nombre de paramètres permettant de décrire l'ensemble des solutions est, d'après la proposition 2.8, $n - q$. Mais on ne peut pas avoir $n - q \geq 1$, sinon l'ensemble des solutions serait infini. On a donc $n = q$: la forme échelonnée réduite du système a n lignes non nulles, aucune ligne nulle (car il y a n lignes en tout), et s'écrit donc :

$$(II.19) \quad \begin{cases} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \\ \vdots \\ x_n = b'_n. \end{cases}$$

Lorsque l'on change le membre de droite du système (S) sans toucher au membre de gauche, on ne change que le membre de droite du système (II.19), puisque ce dernier est obtenu par des opérations élémentaires sur les lignes qui ne mélangent jamais le membre de gauche et le membre de droite des équations. Ceci montre que tout système obtenu à partir de (S) en ne changeant que le membre de droite n'a qu'une seule solution. \square

Définition 2.27. Un système (S) vérifiant les hypothèses de la proposition 2.26 est appelé *système de Cramer*. Un système de Cramer est donc par définition un système linéaire ayant autant d'inconnues que d'équations et une unique solution. De manière équivalente, c'est un système à n équations et n inconnues qui a une forme échelonnée réduite du type (II.19).

Remarque 2.28. D'après la proposition 2.26, le fait d'être un système de Cramer ne dépend pas du second membre du système, mais seulement de ses coefficients.

Exercice 2.29. Dire avec le moins de calculs possibles si les systèmes suivants ont une unique solution, pas de solution ou une infinité de solutions. On identifiera en particulier les systèmes homogènes et les systèmes de Cramer. Les systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) ont pour inconnues x, y et z . Les systèmes (S_4) et (S_5) x, y, z et t .

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ x + y + 2z = -5 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + 3y + z = 4 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} x + 3y + z = -17 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + y - z + 5t = 0 \\ 2x + y + 2z + 4t = 0 \end{cases}, \quad (S_5) \quad x = 2y + 2t = 3z + 4(x + y) = 6x + y + z + t.$$

(cf correction p. 22).

3. Famille de systèmes avec paramètres

On considère parfois une famille de systèmes (S_λ) dépendant d'un paramètre λ . Le but est de résoudre le système selon les valeurs de λ . Il faut traiter ce type de problème avec précaution. Une erreur classique est de diviser une équation par une quantité, dépendant de λ , qui s'annule pour une certaine valeur de λ . On donne ici deux exemples de résolutions détaillées.

Exercice 3.1. Résoudre, selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système suivant :

$$(II.20) \quad \begin{cases} -x + (2\lambda - 6)y - 2z = -7 \\ -x + (4\lambda - 12)y - 2z = -11 \\ x + (3 - \lambda)y + 2z = 5 \end{cases}$$

Correction. On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x + (3 - \lambda)y + 2z = 5 & (L_3) \\ -x + (4\lambda - 12)y - 2z = -11 \\ -x + (2\lambda - 6)y - 2z = -7 & (L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + (3 - \lambda)y + 2z = 5 \\ (-9 + 3\lambda)y = -6 & (L_2) + (L_1) \\ (-3 + \lambda)y = -2 & (L_3) + (L_1) \end{cases}$$

On remarque que les lignes (L_2) et (L_3) du dernier système sont équivalentes. Précisément, (L_2) vaut exactement $3(L_3)$. Le système (II.20) est donc équivalent à

$$(II.21) \quad \begin{cases} x + (3 - \lambda)y + 2z = 5 \\ (-3 + \lambda)y = -2 \end{cases}$$

Ce système est sous forme échelonnée. En regardant le coefficient de y dans la deuxième ligne, on voit qu'il faut distinguer deux cas.

1er cas : $\lambda = 3$. La deuxième ligne de (II.21) s'écrit $0 = -2$. Le système n'a pas de solution.

2ème cas : $\lambda \neq 3$ On obtient :

$$\begin{cases} x + 2z = 3 & (L_1) + (L_2) \\ (-3 + \lambda)y = -2 \end{cases}$$

En prenant x et y comme variable de base et z comme paramètre, on obtient que l'ensemble des solutions est $\left\{ \left(3 - 2z, \frac{2}{3-\lambda}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 3.2. Résoudre, selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système de matrice augmentée :

$$(II.22) \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-4 \\ -2 & 2+2\lambda & 12-4\lambda \\ 2 & -2\lambda & -4+2\lambda \end{array} \right]$$

Correction.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-4 \\ 0 & 0 & 4-2\lambda \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} (L_2)+2(L_1) \\ (L_3)-2(L_1) \end{array}$$

Le système obtenu est presque sous forme échelonnée (il suffirait d'échanger les lignes 2 et 3). La ligne 2 se lit $4 - 2\lambda = 0$. On distingue deux cas :

1er cas : $\lambda \neq 2$. La ligne 2 est contradictoire. Le système n'est pas compatible.

2ème cas : $\lambda = 2$. La ligne 2 se lit $0 = 0$. En notant x et y les variables, le système est équivalent à :

$$x - 3y = -2 \text{ et } 2y = 4,$$

soit $(x, y) = (4, 2)$.

Remarquons que l'on peut parfois ramener un système non-linéaire à un système linéaire avec paramètre :

Exercice 3.3. En utilisant les exercices précédents, résoudre les systèmes non-linéaires :

$$(S_1) \begin{cases} -x_1 + (2x_2 - 6)x_3 - 2x_4 = -7 \\ -x_1 + (4x_2 - 12)x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_1 + (3 - x_2)x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - (1 + z)y = z - 4 \\ -2x + (2 + 2z)y = 12 - 4z \\ 2x - 2zy = -4 + 2z \end{cases}$$

(cf correction p. 22).

4. Réponse à certains exercices

Exercice 2.7

- Une matrice à une ligne est toujours sous forme échelonnée. Elle est sous forme échelonnée réduite si et seulement si son premier coefficient non nul vaut 1. L'équation (ou le "système" à une équation) correspondant(e) est sous forme échelonnée réduite si et seulement si le coefficient de la première variable qui apparaît dans le système vaut 1.

- La matrice du premier système est $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$, celle du deuxième

système est $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$. Le premier n'est pas sous forme échelonnée.

Le deuxième est sous forme échelonnée (réduite). Remarquons que la deuxième matrice est obtenue à partir de la première en échangeant les 2 premières colonnes. Cela revient, sur le système correspondant, à échanger les variables x_1 et x_2 .

II. Systèmes linéaires

- iii. échelonnée non réduite / non échelonnée / échelonnée réduite.
- iv. échelonné réduit / échelonné non réduit / non échelonné.

Exercice 2.10

- ii. L'ensemble des solutions du deuxième système est donné par : $\{(2 - x_3, 3 - x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{K}\}$.
- iii. L'ensemble des solutions du système dont la matrice augmentée est la troisième matrice est donné par $\{(x_1, x_2, 1 - 2x_5 - 3x_6, -2 + 3x_6, x_5, x_6), (x_1, x_2, x_5, x_6) \in \mathbb{K}^4\}$.
- iv. Le système (S_1) a évidemment pour unique solution $(1, 2, 3)$.

Exercice 2.11

La matrice a) est sous forme échelonnée. La dernière colonne ne contient pas d'élément de tête : le système est compatible. Pour décrire l'ensemble des solutions, on peut facilement mettre la matrice sous forme échelonnée réduite (par le remplacement $(L_1) \leftarrow (L_1) + (L_2)$). On obtient la matrice (en omettant la dernière ligne, inutile, qui signifie $0 = 0$) :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Les variables de base sont x_1 et x_4 , les variables libres x_2 et x_3 . Une description paramétrique de l'ensemble des solutions est donnée par :

$$\{(4 - 2x_2 - 3x_3, x_2, x_3, 2), (x_2, x_3) \in \mathbb{K}^2\}.$$

La matrice b) n'est pas sous forme échelonnée. La dernière ligne de cette matrice signifie $3 = 0$: le système n'est pas compatible.

La matrice c) est échelonnée réduite. L'ensemble des solutions est :

$$\{(1 + 3x_4, 2 - 3x_4, -4x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{K}\}.$$

Exercice 2.23

Les systèmes (S_1) et (S_2) sont sous forme échelonnée et compatibles (ils ne contiennent pas de ligne de la forme $0 = c$ avec c non nulle). Le système (S_1) a 3 inconnues et 2 lignes non nulles, on décrit l'ensemble des solutions avec $3 - 2 = 1$ paramètre. Le système (S_2) a 3 inconnues et 3 équations : on décrit l'ensemble des solutions avec $3 - 3 = 0$ paramètre : il a une unique solution (en l'occurrence $(x, y, z) = (7/2, -1, 2)$).

Le système (S_3) n'est pas sous forme échelonnée. De fait, la ligne (L_1) est la somme des lignes (L_2) et (L_3) . Il est équivalent au système (S'_3) obtenu en retirant la ligne (L_3) au système (S_3) . Ce système (S'_3) est échelonné, on peut décrire l'ensemble des solutions de (S_3) avec $3 - 2 = 1$ paramètre.

Exercice 2.25 : on montre en utilisant la méthode du pivot de Gauss qu'il y a une infinité de solutions et que l'ensemble des solutions peut s'écrire $\{(x, x, 3), x \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 2.29

Par les remplacements $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$, on voit que le système (S_1) est équivalent au système

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ -2y + z = -7 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système est un système échelonné compatible à trois équations non nulles pour trois inconnues : c'est donc un système de Cramer, qui a une unique solution. De plus, par la Proposition 2.26 sur les systèmes de Cramer, tout système obtenu à partir de (S_1) en ne changeant que le second membre sont aussi des systèmes de Cramer : on en déduit que (S_2) et (S_3) sont des systèmes de Cramer (et ont donc chacun une et une seule solution).

Le système (S_4) est un système homogène avec 3 équations et 4 inconnues. Il a donc une infinité de solutions. Le système (S_5) est équivalent à :

$$\begin{cases} x - (2y + 2t) = 0 \\ x - 3z - 4(x + y) = 0 \\ x - (6x + y + z + t) = 0 \end{cases}$$

C'est donc aussi un système homogène à 3 équations et 4 inconnues : il a une infinité de solutions.

Exercice 3.3

Les deux systèmes proposés *ne sont pas* des systèmes linéaires, mais se ramènent à des systèmes linéaires en fixant une des variables.

Si l'on fixe x_2 , le système (S_1) est un système linéaire d'inconnues (x_1, x_3, x_4) . Plus précisément, c'est exactement le système (II.20) avec $x = x_1$, $y = x_3$, $z = x_4$ et le paramètre $\lambda = x_2$. L'ensemble des solutions est donné par la résolution du système (II.20) :

$$\left\{ \left(3 - 2x_4, x_2, \frac{2}{3 - x_2}, x_4 \right), x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si l'on fixe z , le système (S_2) est un système linéaire. Plus précisément, c'est le système d'inconnue (x, y) , dont la matrice augmentée est donnée par (II.22) avec $z = \lambda$. On déduit de la résolution de ce système que l'unique solution du système (S_2) est $(x, y, z) = (4, 2, 2)$.

5. Travaux dirigés

Comme dans le reste du chapitre, \mathbb{K} désigne un corps.

Exercice II.1.

a. Soit a, b des éléments de \mathbb{K} . Donner selon les valeurs de a et b l'ensemble des solutions de l'équation

$$ax = b,$$

d'inconnue x .

b. Soient a_1, b_1, a_2, b_2 des éléments de \mathbb{K} . Donner selon la valeur de ces paramètres l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} a_1x = b_1 \\ a_2x = b_2 \end{cases}$$

Exercice II.2.

a. Donner 2 solutions (x, y, z) de l'équation $2x - y + 2z = 4$. Décrire sous forme paramétrique l'ensemble des solutions (réelles) de cette équation.

b. Soit a, b et c des nombres réels. Exprimer (selon les valeurs des paramètres a, b et c) l'ensemble des solutions réelles (x, y) de l'équation

$$ax + by = c.$$

c. Vérifier que dans tous les cas précédents, le système a ou bien une seule solution, ou bien une infinité de solutions, ou bien pas de solution du tout (mais jamais un nombre fini, non nul de solutions).

Exercice II.3. Décrire sous forme paramétrique l'ensemble des solutions (réelles) du système d'inconnues x, y et z

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

Exercice II.4. Les matrices suivantes sont-elles sous forme échelonnée ? Sous forme échelonnée réduite ? (cf §2.a p. 14).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} i+1 & 2i & 2 & -2 \\ 0 & 2i & 1 & 4+2i \end{array} \right].$$

Écrire les systèmes correspondant à ces matrices.

Exercice II.5. Donner toutes les fonctions f , de la forme

$$f(x) = a \sin(x) + b \cos x + c \sin(2x),$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ telles que

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \text{ et } \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = 1.$$

Exercice II.6. Dans le Plan P muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux droites D_1 et D_2 d'équation respective : $x + y = 2$ et $3x - 2y = -2$. Déterminer les coordonnées du point A , intersection des droites D_1 et D_2 . Donner la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite de P passant par A . Retrouver cette forme pour les équations de D_1 et D_2 .

Exercice II.7.

a. En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, mettre chacune des matrices de l'exercice 5 sous forme échelonnée réduite.

b. Déterminer les solutions des systèmes correspondant à ces matrices.

Exercice II.8.

a. Résoudre les systèmes suivants sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 4x_1 + 4x_2 + 20x_3 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ -2x_2 - 2x_3 + x_4 = -9 \end{cases}$$

b. Résoudre sur \mathbb{R} les systèmes de matrices augmentées :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -6 & -12 & -36 & -16 & -16 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 24 & 10 & 10 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & -1 & -3 & 8 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

Exercice II.9. Résoudre les systèmes suivants sur \mathbb{C} :

$$\begin{cases} 2x - 4y + (4 - 4i)z = 6 + 2i \\ -ix + iy - (1 + 2i)z = 1 - 2i. \end{cases}, \quad \begin{cases} -2ix + 3iy + (1 - 2i)z = 1 \\ x + (i - 2)y + (2 - i)z = 0 \\ -ix + iy + (1 - i)z = i \end{cases}$$

Exercice II.10. Pour chacune des matrices augmentées suivantes dire **sans aucun calcul** si le système correspondant a une solution, aucune solution ou une infinité de solutions :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -7 & 9 & 0 \end{array} \right].$$

Exercice II.11.

a. Résoudre le système (réel) de matrice augmentée $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -8 & 0 \end{array} \right]$. Est-ce

un système de Cramer ?

II. Systèmes linéaires

b. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Combien de solutions a le système de matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & -7 & a \\ -1 & 2 & -1 & b \\ 3 & -3 & -8 & c \end{array} \right] ?$$

Résoudre ce système.

Exercice II.12. Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système homogène général de deux équations à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

A quelle condition sur les paramètres a, b, c et d est-ce un système de Cramer ?

Exercice II.13. A quelles conditions sur les réels a, b et c le système suivant est-il compatible ?

$$x + 2z = a, \quad -2x - y - 7z = b \quad \text{et} \quad -x - 3y - 11z = c.$$

Exercice II.14. Résoudre, selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants, d'inconnues réelles (x, y, z) :

$$\begin{cases} 2x + 4y + (2 + 2a)z = 8 - 6a \\ 4x + 2y + (1 + 4a)z = 13 - 9a \\ -2x + 14y + (7 - 2a)z = 2 - 4a \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + (3 + a)z = 2a \\ -2x - 4y + (4a - 2)z = 8 + 2a \\ 2x + 3y + 5z = -3 + 2a. \end{cases}$$

Exercice II.15. Résoudre, selon la valeur du paramètre a , le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - (a + 1)y + 3z = -1 \\ -2x + (a + 1)y - z = 1 \\ x - (a + 1)y + (a + 1)z = a + 1. \end{cases}$$

A quelle condition sur a est-ce un système de Cramer ?

6. Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice II.16. (Cours). Donner la définition d'un système de Cramer. Donner un exemple de système de Cramer à deux équations, deux inconnues.

Exercice II.17. Résoudre n'importe quel "petit" système linéaire réel ou complexe.

Exercice II.18. Résoudre, selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$, le système linéaire, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} ax - 2y = 4 \\ x + (a - 3)y = a. \end{cases}$$

Exercice II.19. A quelles conditions sur les réels a, b et c le système suivant est-il compatible ?

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + 2y + 5z = b \\ x + y + 3z = c. \end{cases}$$

Exercice II.20. Résoudre, selon les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$, le système suivant, d'inconnues complexes (x, y, z) :

$$\lambda x = 1, \quad \lambda y = 0, \quad z = \lambda^3 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0.$$

Exercice II.21. Résoudre dans \mathbb{R} le système linéaire suivant, d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :

Pour tout j variant de 1 à 3, $\sum_{k=1}^3 (j - k)x_k = j$.

III. Introduction aux matrices

Référence : Liret-Martinais¹, chapitre 4.

Nous avons déjà rencontré des tableaux de nombres, ou matrices. Nous allons étudier ici ces matrices de manière plus systématique, en définissant notamment des opérations (additions, multiplications...) sur des ensembles de matrices. Les motivations de ce chapitre sont d'une part de mieux comprendre les systèmes linéaires, qui peuvent être vus comme des équations matricielles, d'autre part d'introduire des notions et des méthodes utiles pour l'algèbre linéaire proprement dite qui sera l'objet de la suite du cours (à partir du chapitre V sur les espaces vectoriels).

Comme dans le chapitre précédent, \mathbb{K} désigne un corps.

1. Définitions. Opérations sur les matrices

1.a. Définitions

Définition 1.1. Soient p et n deux entiers ≥ 1 . Une matrice $p \times n$ à coefficients dans \mathbb{K} est un tableau de nombres (c.à.d. d'éléments de \mathbb{K}) à p lignes et n colonnes, que l'on note :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix},$$

ou $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$, ou encore, quand il n'y a pas d'ambiguïté sur p et n , $A = [a_{ij}]$.

Les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont appelés *coefficients* (ou *éléments*) de A . Le coefficient a_{ij} est situé à la i -ème ligne et j -ème colonne (le premier indice indique toujours la ligne, le deuxième la colonne).

L'ensemble des matrices $p \times n$ est noté $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, ou plus simplement $\mathcal{M}_{p,n}$. Lorsque $p = n$, on dit que la matrice est *carrée*. On note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou \mathcal{M}_n) au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n . On dit que deux matrices sont *de même taille*, ou *de même dimension* lorsqu'elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

Exemples 1.2. La *matrice nulle* de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. Elle est notée 0 , ou plus précisément $0_{p,n}$ quand on veut préciser le nombre de lignes et de colonnes.

$\begin{bmatrix} 1 & i & -5 \\ 3 & 4 & 7+i \end{bmatrix}$ est une matrice complexe 2×3 (*attention ici i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$, ce n'est pas l'indice des lignes!*)

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 3,1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ est une matrice réelle 3×2 .

Définition 1.3. On dit que deux matrices *de même taille* $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont égales lorsque tous leur coefficients sont égaux, i.e. $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} = b_{i,j}$. On note alors $A = B$.

Exemples 1.4. Les matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ne sont pas égales.

Les matrices $[2i+j]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ et $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ sont égales.

Définition 1.5. Une *matrice colonne* (ou un vecteur colonne) à p coefficients est un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Une *matrice ligne* (ou un vecteur ligne) à n coefficients est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

La j -ième colonne de la matrice $[a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ est la matrice colonne $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{bmatrix}$, sa i -ième ligne la matrice ligne $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$.

1.b. Multiplication par un scalaire et additions

On définit maintenant deux opérations qui se font *coefficient par coefficient*.

Définition 1.6. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Le produit de A par λ , noté λA , est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ : si A est la matrice $[a_{ij}]$, λA est la matrice $[\lambda a_{ij}]$.

Définition 1.7. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. La somme de A et B , notée $A + B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}$ obtenue en sommant les coefficients de A et de B deux à deux : si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$, $A + B$ est la matrice $[a_{ij} + b_{ij}]$.

Avertissement 1.8. La somme de deux matrices n'est définie que si ces matrices sont *de même taille*.

1. François Liret et Dominique Martinais. *Algèbre 1re année - Cours et exercices avec solutions*. Dunod, deuxième édition, 2003

III. Introduction aux matrices

Exemples 1.9.

$$17 \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -34 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}, \quad (3+i) \begin{bmatrix} 1 & 3-i \\ i & -1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i & 10 \\ 3i-1 & -3-i \\ 0 & 1-3i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ n'est pas définie.}$$

$$[i+j]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} + [2i-j]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} = [3i]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}.$$

Les propriétés suivantes découlent immédiatement des propriétés (commutativité, associativité, distributivité) de l'addition et de la multiplication sur \mathbb{K} .

Proposition 1.10. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- i. (commutativité) $A + B = B + A$.
- ii. (associativité) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (on note leur valeur commune $A + B + C$).
- iii. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- iv. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ (on note la valeur commune $\lambda\mu A$).
- v. $0 + A = A$.
- vi. $A + (-1)A = 0$.

Exercice 1.11. Démontrer les propriétés de la proposition.

Notation 1.12. On note $-A$ la matrice $(-1)A$ et $A - B$ la somme $A + (-B)$, appelée *différence* de A et B .

1.c. Transposition

Définition 1.13. La transposée de la matrice $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est la matrice $[a_{ji}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On la note tA . Les coefficients de la i -ième ligne de tA sont ceux de la i -ième colonne de A , et inversement, les coefficients de la j -ième colonne de tA sont ceux de la j -ième ligne de A .

On rencontre aussi, en particulier dans les ouvrages en anglais, la notation A^T au lieu de tA .

Avertissement 1.14. Lorsqu'on transpose une matrice, on inverse le nombre de lignes et le nombre de colonnes. Par exemple, la transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et la transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne. La transposée d'une matrice 2×4 est une matrice 4×2 etc...

Exemples 1.15.

$${}^t \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad {}^t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [2 \quad 3 \quad 4] \quad {}^t \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le dernier exemple de matrice A est une matrice carrée qui vérifie $A = {}^tA$: on dit que A est *symétrique*.

On déduit immédiatement de la définition de la transposée :

Proposition 1.16. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$${}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA.$$

1.d. Multiplication des matrices

La définition de la multiplication est plus délicate que celle des opérations précédentes, et nous allons la diviser en deux étapes. Soulignons que contrairement à l'addition, il ne s'agit pas d'une opération coefficient par coefficient.

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 1.17. Soit $A = [a_i]_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ une matrice ligne et $B = [b_j]_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne ayant le même nombre de coefficients. Le produit AB de A et B est le scalaire :

$$AB = \sum_{j=1}^n a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Avertissement 1.18. On ne peut pour l'instant multiplier qu'un vecteur ligne et un vecteur colonne ayant le même nombre de coefficients, et dans cet ordre.

Exemple 1.19.

$$[3 \quad 4 \quad 5] \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{bmatrix} = -3 + 4i + 10 = 7 + 4i.$$

Cas général

Définition 1.20. Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ deux matrices telles que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le produit de A et B , noté AB , $A.B$ ou $A \times B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont le coefficient (i, j) est le produit (au sens de la définition 1.17) de la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B . Le produit $A \times A$ d'une matrice carrée A est noté A^2 et appelé *carré* de A . On définit de même la puissance n -ième $A^n = A \times \dots \times A$ (n fois) d'une matrice carrée A .

Remarque 1.21. Il faut savoir déduire de la définition du produit matricielle une fonction en C retournant le produit de deux matrices données (cf les travaux dirigés et travaux pratiques d'algorithmique).

Remarque 1.22. On déduit immédiatement de la définition la formule du produit matriciel suivante : si $AB = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p, \\ 1 \leq j \leq q}}$, alors

$$(III.1) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Avertissement 1.23. La matrice AB n'est définie que lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le nombre de lignes de AB est le nombre de lignes de A . Le nombre de colonnes de AB est le nombre de colonnes de B .

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ (3, 4) & (4, 2) & & (3, 2). \end{matrix}$$

Exemple 1.24. Pour toute matrice A , $0.A = A.0 = 0$. Ici 0 désigne n'importe quelle matrice nulle de dimension appropriée. Attention : les trois 0 ne désignent pas forcément les mêmes matrices nulles ! On peut écrire plus précisément, si $A \in \mathcal{M}_{p,n}$

$$0_{q,p}A = 0_{q,n}, \quad A0_{n,q} = 0_{p,q}.$$

Exemples 1.25.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ n'est pas défini.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 & 2 \\ 6 & -15 & 0 & 4 \\ -9 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -21 & 3 \\ 8 & 4 & -28 & 4 \\ 10 & 5 & -35 & 5 \end{bmatrix}$$

En pratique, pour calculer le produit $[c_{ij}]$ de deux matrices A et B , on peut les disposer de telle manière que le coefficient c_{ij} à calculer soit aligné sur la i -ième ligne de A et la j -ième colonne de B :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 & 2 \\ 6 & -15 & 0 & 4 \\ -9 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.26. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Donner les valeurs des produits et des carrés de ces matrices (16 opérations potentielles) lorsqu'ils sont définis.

(cf réponses p. 36).

Soit n un entier ≥ 1 . On note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la diagonale principale est composée de 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls :

$$(III.2) \quad I_n = [\delta_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad \delta_{ii} = 1, \quad i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0.$$

Le symbole δ_{ij} est appelé *symbole de Kronecker*.

Exemple 1.27.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition 1.28. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors

$$AI_n = I_pA = A.$$

Exercice 1.29. Démontrer la proposition précédente à l'aide de la formule (III.1).

Définition 1.30. La matrice I_n est appelée *matrice identité*.

On donne maintenant les propriétés de base de la multiplication matricielle :

Théorème 1.31. Soient A, B et C des matrices.

i. *Associativité* : si $A \in \mathcal{M}_{p,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}$,

$$(AB)C = A(BC).$$

On note simplement ABC le produit des trois matrices.

ii. *Distributivité à gauche* : si $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ et $B, C \in \mathcal{M}_{n,q}$,

$$A(B + C) = AB + AC.$$

iii. *Distributivité à droite* : si $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}$ et $C \in \mathcal{M}_{n,q}$,

$$(A + B)C = AC + BC.$$

iv. Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Rappelons encore que ces coefficients du binôme vérifient la relation de récurrence :

$$(III.6) \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Cette formule du binôme reste vraie pour des matrices carrées, lorsque ces matrices commutent.

Proposition 1.38. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$AB = BA.$$

Alors

$$(III.7) \quad (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

La démonstration, qui est exactement la même que dans le cas scalaire, est laissée au lecteur. On peut raisonner par récurrence sur n , en utilisant la formule (III.6).

Exercice 1.39. Trouver deux matrices 2×2 A et B , qui ne commutent pas, et telles que la formule (III.7) soit fautive avec $n = 2$.

2. Matrices inversibles : définitions et exemples

Le but de cette section et de la suivante est l'étude des matrices carrées inversibles pour la multiplication matricielle. Cette section est consacrée à des définitions et des exemples simples. En 3, nous verrons une méthode de calculs des inverses et une caractérisation des matrices inversibles qui reposent largement sur la méthode du pivot de Gauss vue au chapitre II.

2.a. Définition

Définition 2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La matrice A est dite *inversible* quand il existe des matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$AB = CA = I_n,$$

où la matrice I_n est la matrice identité $n \times n$ définie en (III.2). L'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles est noté $GL_n(\mathbb{K})$. Les étudiants de la filière *mathématiques* verront en cours d'arithmétique que $GL_n(\mathbb{K})$, muni de la multiplication, est un groupe.

Exemple 2.2. La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible. La matrice I_n est inversible ($I_n = I_n \times I_n$). La matrice $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

(Vérifier le calcul à l'aide de la formule de la multiplication matricielle.)

Proposition 2.3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, il existe un unique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$(III.8) \quad AB = BA = I_n.$$

La matrice B est appelée inverse de A , et notée A^{-1} . L'unicité signifie que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $MA = I_n$ ou $AM = I_n$, alors $M = A^{-1}$.

En d'autres termes, si une matrice est inversible, l'inverse à gauche et l'inverse à droite de cette matrice sont uniques et égaux.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $AB = I_n$ et $CA = I_n$, alors $B = C$. La matrice B donnée par la définition 2.1 vérifiera alors (III.8), et sera bien unique au sens donné par la proposition.

Cette propriété découle de l'associativité de la multiplication matricielle. En multipliant à gauche l'égalité $AB = I_n$ par C , on obtient

$$\underbrace{CA}_{I_n} B = CI_n = C$$

et donc $B = C$. □

Voici une propriété importante des matrices inversibles (cf l'avertissement 1.35) :

Proposition 2.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors :

i. Si $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$,

$$MA = 0 \implies M = 0.$$

ii. Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$AM = 0 \implies M = 0.$$

Remarque 2.5. La proposition implique que si A est inversible, $(0, 0, \dots, 0)$ est l'unique solution du système homogène $AX = 0$, $X \in \mathbb{K}^n$ qui a n solutions et n inconnues. En d'autres termes, ce système est un système de Cramer. De fait, l'unique solution de l'équation matricielle $AX = B$ est $X = A^{-1}B$. Nous verrons plus loin qu'il y a en fait équivalence : un système de n équations à n inconnues est un système de Cramer si et seulement si la matrice de ses coefficients est inversible.

Démonstration. Démontrons (i), la démonstration de (ii) est similaire. On suppose donc $MA = 0$. En multipliant à droite par A^{-1} , on obtient

$$M \underbrace{AA^{-1}}_{I_n} = 0A^{-1} = 0$$

et donc $M = MI_n = 0$. □

On peut en déduire un exemple typique de matrice non-inversible :

Proposition 2.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'une des colonnes, ou une des lignes de A est nulle. Alors A n'est pas inversible.

Démonstration. On suppose que la i -ième ligne de $A = [a_{ij}]$ est nulle. Soit $Y = [y_j]_{1 \leq j \leq n} = [\delta_{ij}]_{1 \leq j \leq n}$ la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i -ième, qui vaut 1. Alors la matrice ligne YA est nulle : en effet, le ℓ -ième coefficient de cette matrice est donné par

$$\sum_{k=1}^n y_k a_{k\ell} = 0,$$

car $y_k = 0$ si $k \neq i$ par définition de Y , et $a_{i\ell} = 0$ car la i -ième ligne de A est nulle. On en déduit par la Proposition 2.4 que A n'est pas inversible.

Dans le cas où la j -ième colonne de A est nulle, on fait le même raisonnement en multipliant A par la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le j -ième qui vaut 1. \square

Exemple 2.7. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2i & 4 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible. Dans ce cas, la démonstration de la proposition 2.6 signifie que $[0 \ 1 \ 0]A = [0 \ 0 \ 0]$, contredisant la proposition 2.4.

On donne maintenant deux exemples où il est facile de voir si une matrice est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse.

2.b. Matrices diagonales

Définition 2.8. On appelle *matrice diagonale* une matrice carrée $[a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ dont les coefficients en dehors de la diagonale principale $\{i = j\}$ sont nuls. En d'autres termes :

$$i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

Exemples 2.9. Les matrices I_n et $0_{n,n}$ sont diagonales.

Considérons les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est diagonale. Les matrices B et C ne sont pas diagonales (C n'est même pas carrée).

Remarquons que la somme de deux matrices diagonales de même taille est diagonale, et que si A est diagonale, ${}^t A = A$. On note $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ou $\text{diag}(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Par exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, 2, 3) = \text{diag}(j)_{1 \leq j \leq 3}, \quad I_n = \text{diag}(1)_{1 \leq j \leq n}.$$

On peut calculer très facilement le produit de deux matrices diagonales :

Proposition 2.10. Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $B = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ deux matrices diagonales de même taille. Alors

$$AB = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2, \dots, \lambda_n \mu_n).$$

La démonstration, facile, est laissée au lecteur (utiliser (III.1)).

Corollaire 2.11. La matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ est inversible si et seulement si $\lambda_j \neq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Dans ce cas,

$$D^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}.$$

Démonstration. Si tous les λ_j sont non nuls, il est facile de vérifier, en utilisant la proposition 2.10 que

$$\text{diag}(1/\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} D = D \text{diag}(1/\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} = I_n.$$

Supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_k = 0$. Alors la k -ième ligne de D est nulle, et donc par la Proposition 2.6, D n'est pas inversible. \square

Exemples 2.12. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

2.c. Inversibilité des matrices 2×2

Proposition 2.13. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice 2×2 . Alors la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Remarque 2.14. La quantité $ad - bc$ est appelée *déterminant* de A . Le déterminant se généralise à des matrices carrées de plus grande dimension mais les formules sont plus compliquées (voir le chapitre VI de ce cours).

Démonstration. Soit $B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Par la formule du produit matriciel :

$$AB = BA = (ad - bc)I_2.$$

Lorsque $ad - bc = 0$, on obtient $AB = 0$ et la proposition 2.4 montre que A n'est pas inversible. Lorsque $ad - bc \neq 0$, on obtient

$$A \frac{1}{ad-bc} B = \frac{1}{ad-bc} B A = I_2,$$

ce qui montre que A est inversible, d'inverse $\frac{1}{ad-bc} B$. \square

Exercice 2.15. Inverser les matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} -1 & -47 \\ 27 & 1268 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 25 \\ 33 & -824 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -18 & -19 \\ 701 & 740 \end{bmatrix}.$$

2.d. Stabilité par multiplication et transposition

Proposition 2.16. *i. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors tA est inversible si et seulement si A est inversible. Dans ce cas, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*

ii. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. On montre d'abord (i). Supposons pour commencer que A est inversible. On transpose les égalités :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

ce qui donne $({}^t(AB) = {}^tB{}^tA)$:

$${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^t(A^{-1}) = {}^tI_n = I_n.$$

Donc tA est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

Réciproquement, si tA est inversible, $A = {}^t({}^tA)$ est inversible par ce qui précède, ce qui conclut la preuve du point (i).

Pour montrer (ii), on utilise l'associativité de la multiplication :

$$AB B^{-1}A^{-1} = A I_n A^{-1} = A A^{-1} = I_n,$$

et de même

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n.$$

□

Avertissement 2.17. Il ne faut pas se tromper dans l'ordre des facteurs dans la formule du (ii). Rappelons que la multiplication matricielle n'est pas commutative. On n'a donc pas, en général $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

3. Opérations sur les lignes et inversion de matrices

Il y a plusieurs critères équivalents d'inversibilité d'une matrice. Pour le démontrer, nous allons utiliser des notions déjà vues au chapitre II du cours, consacré aux systèmes linéaires. En 3.a, on introduit des *matrices élémentaires* correspondant aux opérations élémentaires du chapitre II. En 3.b on reparle de matrices échelonnées réduites, et en 3.c de la méthode du pivot de Gauss. Les matrices inversibles sont caractérisées en 3.d, par le théorème 3.21. Le 3.e est consacrée à l'interprétation matricielle des systèmes de Cramer.

Les deux points les plus importants de ce chapitre sont l'inversion de matrice par la méthode du pivot de Gauss et le théorème 3.21.

3.a. Matrices élémentaires

On va montrer que les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, rencontrées dans le chapitre sur les systèmes linéaires, reviennent à des multiplications à gauche par des matrices bien particulières, appelées matrices élémentaires. On commence par définir ces matrices.

On fixe $n \geq 2$.

Définition 3.1. On appelle *matrice élémentaire* une matrice carrée $n \times n$ d'un des trois types suivants.

Soient $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. La matrice de *dilatation* $D_k(\lambda)$ est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le k -ième coefficient diagonal vaut λ et les autres coefficients diagonaux valent 1.

Soient $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq \ell$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice de *transvection* $T_{k\ell}(\lambda)$ est la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, le coefficient (k, ℓ) vaut λ , et les autres coefficients sont nuls.

Si $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq \ell$, on note $R_{k\ell}$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent 1, sauf les coefficients (k, k) et (ℓ, ℓ) , qui valent 0, les coefficients (k, ℓ) et (ℓ, k) valent 1, et les autres coefficients sont nuls. La matrice $R_{k\ell}$ est donc obtenue, à partir de I_n , en échangeant la ligne k et la ligne ℓ . Remarquons que $R_{\ell k} = R_{k\ell}$. Les matrices $R_{k\ell}$ sont parfois appelées *matrices de transposition* (à ne pas confondre avec la transposée tA).

Remarquons que les matrices élémentaires dépendent de n . Nous n'avons pas indiqué cette dépendance pour ne pas alourdir les notations.

Exemples 3.2. On suppose $n = 3$. Alors

$$D_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$T_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{31}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3.3. Ecrire $D_2(\lambda)$, $T_{24}(\lambda)$, $T_{42}(\lambda)$, R_{13} quand $n = 4$.

Proposition 3.4. *Soit $q \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.*

*i. Soient $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \neq 0$. La matrice $D_k(\lambda)A$ est obtenue à partir de A en multipliant la k -ième ligne de A par λ . La multiplication à gauche par $D_k(\lambda)$ correspond donc à l'opération élémentaire, appelée *cadrage* et notée $(L_k) \leftarrow \lambda(L_k)$ dans le chapitre précédent du cours.*

III. Introduction aux matrices

ii. Soient $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq \ell$ et $\lambda \neq 0$. La matrice $T_{k\ell}(\lambda)A$ est obtenue à partir de A en ajoutant à la k -ième ligne de A le produit de λ et la ℓ -ième ligne de A . La multiplication à gauche par $T_{k\ell}(\lambda)$ correspond donc à l'opération élémentaire, appelée remplacement et notée $(L_k) \leftarrow (L_k) + \lambda(L_\ell)$ dans le chapitre précédent du cours.

iii. Soient $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$. La matrice $R_{k\ell}A$ est obtenue à partir de A en échangeant les lignes k et ℓ . La multiplication à gauche par $R_{k\ell}$ correspond donc à l'opération élémentaire notée $(L_k) \leftrightarrow (L_\ell)$ dans le chapitre précédent.

Remarque 3.5. On peut montrer² que la multiplication à droite par les matrices élémentaires correspond à des opérations élémentaires sur les colonnes.

Exercice 3.6. Calculer en utilisant la formule du produit matriciel :

$$T_{21}(\lambda) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

et vérifier que la résultat est cohérent avec la proposition 3.4.

Preuve de la proposition 3.4. On ne démontre que le point (ii). La démonstration des autres points est laissée au lecteur.

On note $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$, $T_{k\ell}(\lambda) = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $T_{k\ell}(\lambda)A = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$. On a donc

$$b_{ii} = 1, \quad i = 1 \dots n, \quad b_{k\ell} = \lambda, \quad b_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } (i, j) \neq (k, \ell).$$

Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, q\}$. La formule du produit matriciel (III.1) donne :

$$(III.9) \quad c_{ij} = \sum_{r=1}^n b_{ir} a_{rj}.$$

Si $i \neq k$, $b_{ir} = 0$ pour $r \neq i$, et $b_{ii} = 1$. La formule précédente donne donc $c_{ij} = a_{ij}$. La i -ième ligne de $T_{k\ell}(\lambda)A$ est donc exactement la i -ième ligne de A .

On considère maintenant le cas $i = k$. On a $b_{kr} = 0$ pour $r \notin \{k, \ell\}$, $b_{kk} = 1$, et $b_{k\ell} = \lambda$. La formule (III.9) avec $i = k$ s'écrit donc

$$c_{kj} = a_{kj} + \lambda a_{\ell j},$$

et la k -ième ligne de $T_{k\ell}(\lambda)A$:

$$[c_{k1}, \dots, c_{kq}] = [a_{k1}, \dots, a_{kq}] + \lambda[a_{\ell 1}, \dots, a_{\ell q}] = (L_k) + \lambda(L_\ell),$$

en notant (L_k) et (L_ℓ) la k -ième et la ℓ -ième ligne de A . Le point (ii) est démontré. \square

2. Par exemple en appliquant la proposition 3.4 aux matrices transposées.

Exercice 3.7. En s'inspirant de la démonstration précédente, montrer les points (i) et (iii) de la proposition 3.4.

Exercice 3.8. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}.$$

En utilisant la proposition 3.4, calculer AC , BC , AB , BA .

Proposition 3.9. Les matrices $D_k(\lambda)$ ($\lambda \neq 0$), $T_{k\ell}(\lambda)$ ($k \neq \ell$) et $R_{k\ell}$ sont inversibles et :

- i. $(D_k(\lambda))^{-1} = D_k(\frac{1}{\lambda})$;
- ii. $(T_{k\ell}(\lambda))^{-1} = T_{k\ell}(-\lambda)$;
- iii. $R_{k\ell}^{-1} = R_{k\ell}$.

Démonstration. Les matrices de dilatation étant diagonales, le point (i) découle immédiatement du Corollaire 2.11 (on peut aussi utiliser la proposition 3.4 comme dans ce qui suit).

D'après la proposition 3.4, la matrice

$$T_{k\ell}(\lambda)T_{k\ell}(-\lambda) = T_{k\ell}(\lambda)T_{k\ell}(-\lambda)I_n$$

est obtenue à partir de la matrice I_n par les opérations :

$$(L_k) \leftarrow (L_k) - \lambda L_\ell,$$

puis

$$(L_k) \leftarrow (L_k) + \lambda L_\ell.$$

Puisque $k \neq \ell$, on a donc bien³ $T_{k\ell}(\lambda)T_{k\ell}(-\lambda) = I_n$ et de même $T_{k\ell}(-\lambda)T_{k\ell}(\lambda) = I_n$, ce qui montre le point (ii).

D'après la proposition 3.4, la matrice $R_{k\ell}R_{k\ell} = R_{k\ell}R_{k\ell}I_n$ est obtenue à partir de I_n en échangeant deux fois les lignes ℓ et k . C'est donc bien la matrice I_n , ce qui montre le point (iii). \square

Exercice 3.10. Calculer lorsque $n = 4$, $R_{24}(17)R_{24}(-17)$ en utilisant la formule du produit matriciel et vérifier le point (3.4).

Exercice 3.11. Démontrer la proposition 3.9 en utilisant seulement la formule du produit matriciel, mais pas la proposition 3.4. \square

3. l'hypothèse $k \neq \ell$ montre que la ligne (L_ℓ) n'a pas changé après la première opération.

3.b. Matrices échelonnées réduites carrées

On renvoie au chapitre précédent ou à David C. Lay⁴ pour la définition d'une matrice échelonnée et d'une matrice échelonnée réduite. Le but de cette partie est de caractériser les matrices échelonnées réduites carrées inversibles.

Définition 3.12. La matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure* si tous les coefficients de A en dessous de la diagonale principale sont nuls. En d'autres termes :

$$1 \leq j < i \leq n \implies a_{ij} = 0.$$

Exemples 3.13. Les matrices diagonales sont triangulaires supérieures. En particulier, la matrice I_n et la matrice $0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont triangulaires supérieures. Considérons les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est triangulaire supérieure. Les matrices B et C ne le sont pas (B n'est pas carrée. Le coefficient $(2, 1)$ de C est non nul).

Proposition 3.14. Une matrice échelonnée carrée est triangulaire supérieure.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée. On note p le nombre de lignes non nulles de A . On a donc $0 \leq p \leq n$, $p = n$ si toutes les lignes de A sont non nulles, $p = 0$ si $A = 0$. De plus, si $1 \leq p \leq n$, A étant échelonnée, les lignes $1, 2, \dots, p$ de A sont non nulles, et les lignes $p+1, \dots, n$ sont nulles.

On suppose $A \neq 0$, i.e. $p \geq 1$ (sinon $A = 0$ est triangulaire supérieure et la démonstration est finie).

Pour $1 \leq i \leq p$, on note $J(i)$ la colonne de l'élément de tête (le coefficient non nul le plus à gauche) de la i -ième ligne de A . Par propriété des matrices échelonnées, on a $J(k+1) \geq J(k) + 1$ pour $k = 1 \dots p-1$ et donc, puisque $J(1) \geq 1$, $J(i) \geq i$ pour tout i entre 1 et p , ce qui signifie exactement que la matrice A est triangulaire supérieure. \square

Exemple 3.15. Pour illustrer la proposition et sa démonstration, considérons la matrice échelonnée 5×5 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & i \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

C'est bien une matrice triangulaire supérieure. Le nombre de lignes non nulles est $p = 4$; $J(1) = 1$, $J(2) = 3$, $J(3) = 4$ et $J(4) = 5$.

Théorème 3.16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée réduite. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i. A est inversible ;
- ii. aucune ligne de A n'est nulle ;
- iii. $A = I_n$.

La seule matrice échelonnée réduite inversible est donc la matrice identité.

Démonstration. La matrice I_n est inversible, donc (iii) \implies (i). De plus, on sait déjà (i) \implies (ii) (cf proposition 2.6).

Il reste à démontrer (ii) \implies (iii). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée réduite sans ligne nulle. Par la proposition 3.14, elle est triangulaire supérieure. Par hypothèse, elle a exactement n lignes non nulles. On reprend la notation $J(i)$ de la démonstration de la proposition 3.14. Montrons pour commencer

$$(III.10) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad J(i) = i.$$

Puisque la matrice est triangulaire supérieure, on a $i \leq J(i) \leq n$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. La matrice A étant échelonnée, on a aussi $J(i) \leq J(i+1) - 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Puisque $J(n) \leq n$, on obtient $J(i) \leq i$ pour tout i , par une récurrence descendante sur i . D'où (III.10).

Par (III.10), les éléments de tête sont tous sur la diagonale $i = j$. La matrice A étant échelonnée réduite, ces éléments de tête sont tous égaux à 1, et les coefficients au-dessus de chaque élément de tête sont nuls, ce qui montre $A = I_n$. \square

3.c. Inversions de matrices par la méthode du pivot de Gauss

Soit A une matrice carrée. Par la méthode du pivot de Gauss (cf le théorème 2.19 du chapitre précédent), on peut ramener A à une matrice échelonnée réduite A' par un certain nombre (disons p) de transformations élémentaires sur les lignes de A . Ces transformations élémentaires correspondant à des multiplications par des matrices élémentaires (cf §3.a et Proposition 3.4), on a donc :

$$E_p \dots E_1 A = A',$$

où les matrices E_j correspondent aux p transformations élémentaires appliquées à A . Puisque les matrices élémentaires sont inversibles, on a :

$$A = E_1^{-1} \dots E_p^{-1} A'.$$

D'où (les matrices E_j^{-1} étant elles aussi des matrices élémentaires) :

4. David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications*. Troisième édition, 2004

Théorème 3.17. *Toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est produit de matrices élémentaires et d'une matrice échelonnée réduite A' . Elle est inversible si et seulement si $A' = I_n$, c'est à dire si et seulement si elle est produit de matrices élémentaires.*

(le dernier point découle du théorème 3.16).

Application : calcul de l'inverse d'une matrice

Donnons maintenant une méthode pratique pour étudier l'inversibilité de A , et, lorsque A est inversible, calculer son inverse. On commence par écrire sur deux colonnes la matrice A et la matrice I_n . On ramène ensuite, par la méthode du pivot de Gauss, la matrice A à une matrice échelonnée réduite, tout en appliquant les mêmes opérations élémentaires sur la matrice I_n .

- Si A est inversible, on obtient sur la colonne de gauche la matrice $I_n = E_p \dots E_1 A$ et sur la colonne de droite la matrice $E_p \dots E_1$. L'égalité $I_n = E_p \dots E_1 A$ montre que la matrice obtenue sur la colonne de droite est exactement A^{-1} .
- Si A n'est pas inversible, on obtient sur la colonne de gauche une matrice échelonnée réduite avec au moins une ligne nulle. Dans ce cas, si le but est seulement d'étudier l'inversibilité de A , la colonne de droite est inutile, et on peut arrêter la méthode du pivot dès que l'on a obtenu une ligne nulle.

Cette méthode sera implémentée informatiquement dans la partie "algorithmique" de ce cours.

Exemple 3.18. On veut inverser la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 8 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 8 & -1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (L_2) \leftarrow (L_2) + 2(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) + 6(L_1) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_2) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_3) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_3) \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (L_1) \leftarrow (L_1) + (L_2) & \begin{bmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 3.19. Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. Par les opérations $(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1)$, $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$ puis $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_2)$, on obtient la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La troisième ligne de cette matrice étant nulle, on en déduit que A n'est pas inversible.

On termine cette partie par une remarque qui découle facilement de la méthode précédente :

Proposition 3.20. *Soit A une matrice triangulaire supérieure. Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non-nuls.*

En effet, si aucun des coefficients diagonaux de A n'est nul, A est échelonnée, et la phase de remontée de la méthode du pivot permet d'obtenir I_n à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes.

Supposons maintenant que l'un des coefficients diagonaux est nul. Si ce coefficient est le n -ième, la dernière ligne est nulle et la matrice n'est pas inversible. Si ce n'est pas le cas, on peut transformer, par des opérations élémentaires sur les lignes, la matrice A en une matrice A' ayant une ligne nulle, ce qui montrera que A n'est pas inversible (sinon A' serait un produit de matrice inversible, donc inversible). Pour obtenir la ligne nulle, on note (i, i) les coordonnées du dernier coefficient diagonal nul, de tel sorte que $a_{ii} = 0$, et $a_{kk} \neq 0$ pour $k > i$. Exactement de la même façon que dans la phase de remontée de la méthode du pivot, en utilisant que les éléments de tête des lignes (L_k) , $k > i$ sont non nuls, on transforme A , par une série de remplacements, en une matrice dont la i -ième ligne est nulle.

3.d. Caractérisation des matrices inversibles

Le théorème fondamental suivant, qui découle de ce qui précède, donne plusieurs critères pour reconnaître une matrice inversible.

Théorème 3.21. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i. A est inversible ;
- ii. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $BA = I_n$;
- iii. $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $AC = I_n$;
- iv. l'équation $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, a pour seule solution $X = 0$;
- v. pour tout $E \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = E$, a une seule solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;

Démonstration. On commence par montrer que les points (i), (ii), (iv) sont équivalents. Par définition de l'inversibilité, (i) \Rightarrow (ii). Par ailleurs, si (ii) est vrai et $AX = 0$, alors $X = BAX = B0 = 0$ et donc (ii) \Rightarrow (iv).

Supposons (iv). On veut montrer que A est inversible. Par la méthode du pivot de Gauss, réinterprétée en terme d'opérations élémentaires sur les lignes (cf §3.c), $E_p \dots E_1 {}^t A = R$ où R est une matrice échelonnée réduite et les E_j des matrices élémentaires. On veut montrer que $R = I_n$, ce qui impliquera que ${}^t A$ est inversible (car produit des matrices inversibles $E_1^{-1} \dots E_p^{-1}$) et donc que A est inversible. On raisonne par l'absurde : si $R \neq I_n$, par le théorème 3.16, la dernière ligne de R est une ligne de 0. Soit $Y' = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Alors

$$Y' E_p \dots E_1 {}^t A = Y' R = 0_{1,n}$$

et donc

$$Y {}^t A = 0_{1,n}$$

avec $Y = Y' E_p \dots E_1 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Les matrices E_1, \dots, E_p étant inversible, Y est non nul (Proposition 2.4). En passant à la transposée, on obtient $AX = 0$ avec $X = {}^t Y$, qui est un vecteur colonne non nul. Ceci contredit (iv). Donc A est inversible, ce qui conclut la preuve de (iv) \Rightarrow (i).

On a évidemment (v) \Rightarrow (iv), (i) \Rightarrow (v), et puisque (iv) \Rightarrow (i), le point (v) est équivalent à tous les points précédents.

Enfin, (i) implique (iii) par définition. Réciproquement, supposons (iii). En transposant l'égalité $AC = I_n$, on obtient ${}^t C {}^t A = I_n$. Donc ${}^t A$ vérifie (ii). Par ce qui précède, ${}^t A$ est inversible, ce qui implique, par la proposition 2.16 sur l'inversibilité des matrices transposées, que A est inversible. On a montré (iii) \Rightarrow (i), ce qui conclut la preuve du théorème. \square

Exercice 3.22. Soit

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 15 & -6 \\ -4 & 9 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calculer AX . La matrice A est-elle inversible? (Correction p. 36).

Remarque 3.23. On peut également montrer que l'inversibilité de A est équivalente au fait que l'équation $YA = 0$, d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, a pour seule solution $Y = 0$, ou que pour tout $F \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, l'équation $YA = F$, a une seule solution $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. La démonstration de ces équivalences est laissée au lecteur.

3.e. Système de Cramer et matrice inversible

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues, et A la matrice des coefficients. La matrice A est donc une matrice carrée $n \times n$. Le système (S) s'écrit

$$AX = B,$$

où B est la matrice colonne ($B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) formé du second membre de l'équation,

et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est la matrice inconnue.

Le point (i) \iff (v) du théorème 3.21 signifie exactement :

(S) est un système de Cramer $\iff A$ est inversible.

On distingue deux cas :

- La matrice A est inversible et le système (S) est un système de Cramer : il a une unique solution $X = A^{-1}B$, quel que soit le second membre B . Le calcul de A^{-1} permet de résoudre rapidement le système quel que soit B .
- Si A n'est pas inversible, le système homogène $AX = 0$ a une infinité de solutions : en effet, le point (iv) est faux, il y a donc une solution non nulle X et tous les λX , $\lambda \in \mathbb{K}$ sont aussi solutions. Le système (S) a ou bien aucune solution, ou bien une infinité de solutions. Dans ce cas, A étant fixée, la compatibilité du système $AX = B$ dépend du second membre B .

Exemple 3.24. Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ -3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$$

La matrice des coefficients de ces trois systèmes est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

On montre par la méthode du pivot que A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

III. Introduction aux matrices

Les trois systèmes sont des systèmes de Cramer. Les solutions de ces systèmes sont respectivement :

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ -1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3.25. Appliquer la méthode du pivot à l'exemple précédent pour calculer A^{-1} et vérifier le résultat annoncé.

4. Réponse à quelques exercices

Exercice 1.26. $AC, AD, BA, B^2, CA, CB, DC$ et D^2 ne sont pas définis.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -5 & 2+2i \\ -3-3i & -7 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 6 & 3+i & -3 \\ -6+2i & -3-2i & 9 \end{bmatrix}, \quad BC = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$
$$BD = \begin{bmatrix} 3-3i & 6-6i \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, \quad C^2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad CD = \begin{bmatrix} -12 & -24 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$DA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 15 & -6-6i \\ 10 & -4-4i \end{bmatrix}, \quad DB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -18 & -9-3i & 9 \\ -12 & -6-2i & 6 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.15. Les matrices inverses sont $\begin{bmatrix} 1268 & 47 \\ -27 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 824 & 25 \\ 33 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -740 & -19 \\ 701 & 18 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.22. On trouve

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice ne vérifie donc pas le point iv du théorème 3.21, ce qui montre qu'elle n'est pas inversible.

5. Travaux dirigés

Exercice III.1. On donne les matrices suivantes :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2i & 3 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \\ 3 & -i \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; T = \begin{bmatrix} -1 \\ -3i \\ 1+i \end{bmatrix} \text{ et } U = [2+i \quad 1 \quad 1+i].$$

- a. Donner les coefficients suivants de la matrice M : $m_{3,1}$, $m_{1,2}$.
 b. Calculer, lorsque c'est possible, les sommes suivantes : $M + N$; $M + P$; $T + U$; ${}^tT + U$.
 c. Calculer, lorsque c'est possible, les produits suivants :

$$2iN ; 3U ; NM ; {}^tMN ; MP ; P^tM ; UT ; TU ; T^2 ; P^2.$$

- d. A quelles conditions sur les dimensions des matrices A et B peut-on calculer la somme $A + {}^tB$?
 e. A quelles conditions sur les dimensions des matrices A et B peut-on calculer le produit $A {}^tB$?

Exercice III.2. Soit B une matrice telle que

$$B \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Donner les dimensions de B , puis déterminer B .

Exercice III.3. On fixe $n \geq 2$. Soient les matrices :

$$- B_n = [b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \text{ où } b_{ij} = 0 \text{ si } i > j, b_{i,j} = i - j \text{ sinon ;}$$

$$- C_n = [c_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \text{ où } \\ c_{i,j} = 0 \text{ si } |i - j| > 1 \text{ ou si } i = j, \\ c_{i,j} = 1 \text{ si } |i - j| = 1.$$

- a. Ecrire la matrice B_4 et la matrice C_4 .
 b. Calculer le produit B_3C_3 . Calculer C_3^2 .
 c. Calculer C_n^2 . On notera $[d_{i,j}]$ les coefficients de C_n^2 et on distinguera les cas $|i - j| > 2$, $|i - j| = 2$, $|i - j| = 1$ et $i = j$.

Exercice III.4.

- a. Posons $N := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer N^n pour $n \geq 1$.

- b. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. En utilisant l'égalité $A = 2I_3 + N$ et en vérifiant que l'on peut utiliser la formule du binôme de Newton, calculer A^n .

Exercice III.5. Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 - i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} z + 2i & 3 \\ -1 & z \end{bmatrix} \text{ en fonction du paramètre } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice III.6. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- a. On considère un système linéaire (S) homogène à 2 équations et 3 inconnues sur \mathbb{K} . Le système (S) est-il compatible ? Combien a-t-il de solution(s) ?
 b. Soit $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}$, non nul, tel que $BX = 0$.
 c. En déduire qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_3$.

$$\text{Exercice III.7. Soit pour } \theta \in \mathbb{R} \text{ la matrice } 3 \times 3, R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

- a. Calculer $R_\theta R_\sigma$ pour $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$.
 b. La matrice R_θ est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.
 c. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ un point de \mathbb{R}^3 . Interpréter géométriquement $R_\theta X$. Les résultats précédents sont-ils cohérents avec cette interprétation géométrique ?

Exercice III.8. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant que ces matrices sont des matrices élémentaires, calculer :

$$C^n, (n \in \mathbb{N}) \quad AB^4C^3A \quad C^4B^3C^2.$$

Exercice III.9.

III. Introduction aux matrices

a. En utilisant la méthode du pivot, dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 10 \\ -2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Le système suivant est-il un système de Cramer ?

$$\begin{cases} -x - y - 3z = a \\ 3x + 2y + 10z = b \\ -2x - y - 8z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système.

Exercice III.10.

a. A quelle condition sur le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice suivante est-elle inversible ? Calculer son inverse lorsqu'elle est inversible.

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 9 + 2\lambda & 8 - 4\lambda \\ 1 & 5 + \lambda & 6 - 3\lambda \\ 2 & 11 + 2\lambda & 14 - 7\lambda \end{bmatrix}$$

b. A quelle condition sur λ le système suivant (d'inconnues réelles x, y, z) a-t-il une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} 2x + (9 + 2\lambda)y + (8 - 4\lambda)z = 3 \\ x + (5 + \lambda)y + (6 - 3\lambda)z = 2 \\ 2x + (11 + 2\lambda)y + (14 - 7\lambda)z = 5 \end{cases}$$

Exercice III.11. Déterminer les inverses des matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1,01 \\ 0,99 & 1 \end{bmatrix}$ et

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,99 & 1 \end{bmatrix}.$$

A votre avis, quel problème se pose si on calcule l'inverse d'une matrice en remplaçant chacun de ses coefficients par une valeur approchée ?

★ *Exercice III.12.* Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On appelle trace de A , et on note $\text{tr } A$ la somme $a_{11} + a_{22}$.

a. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$ et $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A$.

b. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

c. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$AB - BA = I_2.$$

d. Soit $n \geq 2$. Si $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Généraliser les questions précédentes aux matrices $n \times n$.

★ *Exercice III.13.* Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$(III.11) \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AB = BA.$$

a. Soit $(k, \ell) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$. On note $E_{k,\ell}$ la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (k, ℓ) qui vaut 1. Calculer les coefficients de $AE_{k,\ell}$ et $E_{k,\ell}A$.

b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Montrer réciproquement que les matrices $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifient la propriété (III.11).

6. Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice III.14. Question de cours : montrer les propriétés de base de la multiplication matricielle (cf théorème 1.31).

Exercice III.15. On considère les matrices

$$A = [i + j]_{\substack{1 \leq i \leq 2, \\ 1 \leq j \leq 3}}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Calculer, quand c'est possible, les matrices suivantes

$$AB, \quad BA, \quad A + B, \quad A^2, \quad C^2, \quad {}^t A + 2B, \quad AC, \quad {}^t AC, \quad AD, \quad DA \text{ etc...}$$

(ou tout autre somme, produit ou transposée de matrices explicites).

Exercice III.16. Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{bmatrix}$. Calculer A^n pour tout n .

Exercice III.17. Question de cours : montrer l'associativité de la multiplication matricielle (cf polycopié : théorème II.1.31, i, et la démonstration p.18).

Exercice III.18. Les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -16 \\ -2 & 4 & 14 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 0 & -1 + i \\ 1 & i & i \\ i & -1 + i & -1 \end{bmatrix}$$

sont-elles inversibles ? Donner l'inverse des matrices qui le sont. (*Même question possible avec d'autres petites matrices carrées explicites*).

Appendice : alphabet grec

Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule	Nom
α	<i>A</i>	alpha	ν	<i>N</i>	nu
β	<i>B</i>	bêta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	o	<i>O</i>	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	<i>E</i>	epsilon	ρ	<i>P</i>	rhô
ζ	<i>Z</i>	zêta	σ	Σ	sigma
η	<i>H</i>	êta	τ	<i>T</i>	tau
θ	Θ	thêta	υ	Υ	upsilon
ι	<i>I</i>	iota	ϕ	Φ	phi
κ	<i>K</i>	kappa	χ	<i>X</i>	khi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	<i>M</i>	mu	ω	Ω	oméga

Table des matières de la première partie

I. Les polynômes	3
1. Définitions	3
1.a. Polynômes comme suites finies	3
1.b. Addition	3
1.c. Indéterminée	3
1.d. Multiplication	4
2. Premières propriétés	4
2.a. Division euclidienne	4
2.b. Fonctions polynomiales	5
2.c. Polynôme dérivé	5
3. Racines	6
3.a. Cas général	6
3.b. Polynômes à coefficients complexes	7
3.c. Polynômes à coefficients réels	7
4. Complément : polynômes irréductibles	8
4.a. Cas général	8
4.b. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$	8
4.c. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$	8
5. Réponse à quelques exercices	9
6. Travaux dirigés	10
7. Exercices à préparer pour le contrôle continu	10
II. Systèmes linéaires	11
1. Définitions et premiers exemples	11
1.a. Définitions	11
1.b. Quelques exemples simples	12
1.c. Notation matricielle	13
2. Méthode du pivot	13
2.a. Forme échelonnée	14
2.b. Systèmes équivalents. Opérations élémentaires	16
2.c. Méthode du pivot de Gauss	17
2.d. Système de Cramer	20
3. Famille de systèmes avec paramètres	21
4. Réponse à certains exercices	21
5. Travaux dirigés	23
6. Exercices à préparer pour le contrôle continu	24

III. Introduction aux matrices	25
1. Définitions. Opérations sur les matrices	25
1.a. Définitions	25
1.b. Multiplication par un scalaire et additions	25
1.c. Transposition	26
1.d. Multiplication des matrices	26
1.e. Systèmes linéaires et matrices	28
1.f. Formule du binôme	28
2. Matrices inversibles : définitions et exemples	29
2.a. Définition	29
2.b. Matrices diagonales	30
2.c. Inversibilité des matrices 2×2	30
2.d. Stabilité par multiplication et transposition	31
3. Opérations sur les lignes et inversion de matrices	31
3.a. Matrices élémentaires	31
3.b. Matrices échelonnées réduites carrées	33
3.c. Inversions de matrices par la méthode du pivot de Gauss	33
3.d. Caractérisation des matrices inversibles	34
3.e. Système de Cramer et matrice inversible	35
4. Réponse à quelques exercices	36
5. Travaux dirigés	37
6. Exercices à préparer pour le contrôle continu	38